



## Joint Replenishment of Partially Substitutable Imperfect Items with Cost of Substitution

Hadiseh Sadat Noorbakhsh, Davood Mohammaditabar \* 

\*Associate Professor, Faculty of Industrial Engineering, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

(Received: 19/11/2023, Revised: 30/12/2023, Accepted: 06/02/2024, Published: 20/05/2024)

DOR:20.1001.1.20089198.1403.26.82.5.2

### ABSTRACT

*In inventory management, some items can be substituted for others. This means that in case of a shortage, some of the demand can be met by the substitute item, leading to reduced shortage costs. This paper examines two partially substitutable products with imperfect items in the order quantity. Imperfect items are removed after inspection. The two items have the same cycle time, and in the case of a shortage, part of the demand is substituted. The model is presented and solved symbolically for some special cases, and a numerical example is provided for the general case. The findings show that increasing substitution costs, decreasing holding costs of the substitutable item, and decreasing the percentage of substitution could reduce the time with a shortage. Moreover, increasing substitution and holding costs increases the total inventory costs, while the increase in the percentage of substitution could either increase or decrease the total inventory costs in different intervals.*

**Keywords:** Joint Replenishment, Substitutable Items, Imperfect Items, Lost Sale

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.

**Publisher:** Imam Hussein University

 Authors



\* Corresponding Author Email: d\_mohammaditabar@azad.ac.ir

علمی - پژوهشی

## مدل سازی مسئله سفارش هم زمان کالاها با قابلیت جایگزینی نسبی به همراه هزینه جایگزینی و امکان معیوب بودن بخشی از انباشته خرید

حدیثه سادات نوربخش<sup>۱</sup>، داود محمدی تبار<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران ۲- دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، واحد تهران

جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

DOR:20.1001.1.20089198.1403.26.82.5.2

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷

تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۲/۳۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۸

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۰/۰۹

### چکیده

در مدیریت کنترل موجودی، تقاضای برخی از اقلام قابلیت جایگزینی با اقلام دیگر را دارد. بدین ترتیب در دوره مواجهه با کمبود، می توان برای تأمین بخشی از تقاضا، از کالای جایگزین استفاده کرده و هزینه های مواجهه با کمبود را کاهش داد. در این مقاله دو کالای قابل جایگزین در نظر گرفته شده که بخشی از انباشته خرید آن ها معیوب بوده که پس از بازرسی اقلام معیوب، معدوم می شود. دو کالا دارای سیکل سفارش مشترک بوده و در هنگام مواجهه با کمبود بخشی از تقاضا با کالای دیگر جایگزین می شود و بخش دیگر نیز از دست می رود. مدل سازی مسئله به صورت تحلیلی انجام شده و برای برخی از حالات خاص مدل، فرمول تحلیلی متغیرهای تصمیم مدل بر اساس پارامترها به دست آمده است. الگوریتم حل مسئله در حالت کلی تشریح شده و سپس با ارائه یک مثال عددی تحلیل حساسیت مدل انجام شده است. بر اساس نتایج به دست آمده در صورت افزایش هزینه های جایگزینی یا کاهش هزینه های نگهداری و یا کاهش درصد جایگزینی، نسبتی از زمان که موجودی کالا دچار کمبود شده، کاهش می یابد. همچنین اگرچه کاهش هزینه جایگزینی منجر به کاهش هزینه کل سیستم می شود اما در خصوص درصد جایگزینی، با تغییر درصد جایگزینی در بازه های مختلف، هزینه کل می تواند افزایش یا کاهش یابد.

### واژه های کلیدی: سفارش هم زمان، کالای جایگزین، کالای معیوب، فروش ازدست رفته

#### ۱- مقدمه

در این شرایط درصد جایگزینی اقلام و هزینه های مربوط به تغییر سفارش مشتری نیز به پارامترهای سیستم افزوده شده و مدل سازی کنترل موجودی با لحاظ کردن هم زمان دو کالای قابل جایگزین انجام می شود. کالاهای قابل جایگزین، کالاهایی هستند که ویژگی های مشابه یا کاملاً یکسان برای تأمین نیاز مشتری دارند. به عنوان مثال مشتری که برای خرید نوشابه به یک فروشگاه مراجعه می کند در صورت عدم موجودی نوشابه ممکن است دوغ را جایگزین آن کند چون هردوی این کالاها نیاز به نوشیدنی مشتری را مرتفع می کنند. مثال های متعددی در این خصوص می توان مطرح کرد که میزان جایگزینی دو کالا کمتر یا بیشتر باشد و یا مشتری مصرف کننده نهایی یا کسب و کار باشد. به عنوان نمونه می توان به مقاله درانزر و همکاران [۲] رجوع کرد که مثال هایی از استفاده از کمپرسورهای مختلف در تولید یخچال، و فروش کالای جایگزین در سوپرمارکت ها بیان شده است. هر چه دو کالا ویژگی های مشترک بیشتری داشته باشند درصد بیشتری از مشتری ها از امکان جایگزینی هر کدام در صورت کمبود دیگری استفاده می کنند. در صورتی که همه

کنترل موجودی یکی از اجزای مهم تصمیم گیری یک سازمان است که بر درآمد و هزینه های آن تأثیر زیادی دارد. یکی از تصمیمات مهم در کنترل موجودی نحوه مواجهه با کمبود و سطح سرویس سیستم است. در هنگام مواجهه با کمبود خسارت ها و همچنین هزینه فرصت های قابل توجهی به سیستم تحمیل می شود. از طرف دیگر در صورتی که برای اجتناب از کمبود سطح موجودی ها افزایش یابد، سیستم با هزینه های بالای نگهداری اقلام و هزینه های سرمایه مواجه می شود. بنابراین همواره مدل سازی موجودی ها با لحاظ کردن هزینه های فروش ازدست رفته، کمبود پس افت، نگهداری اقلام و هزینه های سفارش دهی انجام می شود تا ضمن بهینه سازی هزینه کل، سطح سرویس مطلوبی ارائه شود [۱]. یکی از شیوه های مواجهه با کمبود، ارائه اقلام جایگزین است. بدین ترتیب در مواقعی که مشتری با کمبود یک کالا مواجه می شود می تواند نیاز خود را از طریق یک کالای جایگزین تأمین کند.

\* رایانامه نویسنده مسئول: [d\\_mohammaditabar@azad.ac.ir](mailto:d_mohammaditabar@azad.ac.ir)

تقاضای کالایی که دچار کمبود شده است با کالای دیگر جایگزین شود، به آن دو کالا کاملاً جایگزین گفته می‌شود. اما در صورتی که تنها بخشی از تقاضای دچار کمبود شده کالای دیگر را جایگزین کند به آن دو کالا نسبتاً جایگزین گفته می‌شود.

تحقیقات متعددی در زمینه اقلام قابل جایگزین انجام شده است. درانزر و همکاران [۲] از اولین تحقیقاتی است که به مدل‌سازی مسئله سفارش هم‌زمان دو کالای قابل جایگزین با مفروضات مدل سفارش اقتصادی پرداخته است. گورانی و درانزر [۳] بیش از دو کالای قابل جایگزین در نظر گرفتند و مسئله را پیچیده‌تر کردند. آن‌ها یک رویه حل استاندارد برای مسئله در نظر گرفتند که در زمان کمی، زمان سفارش و تعداد جایگزینی اقلام (کالاها) را به دست می‌آورد که با جواب بهینه اختلاف کمی داشت. کانگ و همکاران [۴] مسئله سفارش هم‌زمان کالاها را همراه با جایگزینی و تخفیف مقداری در نظر گرفتند و یک رویه حل ابتکاری برای مسئله معرفی کردند. طالعی زاده و همکاران [۵] مسئله سفارش دهی هم‌زمان چند کالا همراه با جایگزینی در یک زنجیره تأمین دوسطحی شامل یک فروشنده و چندین خرده‌فروش را همراه با اثر خرابی در کالای نهایی و جریان مواد در نظر گرفتند. آن‌ها مدلی را برای مسئله معرفی کردند که قیمت خرده‌فروش، فرکانس سفارش هم‌زمان کالاها، چرخه سفارش هم‌زمان و نرخ تولید را به صورت هم‌زمان در نظر می‌گرفت. آن‌ها برای حل مسئله رویکرد استکلبرگ، جایی که فروشنده به عنوان رهبر زنجیره و خرده‌فروشان به عنوان زیرمجموعه هستند را در نظر گرفتند. سید حسینی و همکاران [۶] مدل سفارش هم‌زمان چند کالا با جایگزینی را در نظر گرفتند و از رویکرد شبیه‌سازی برای حل مسئله استفاده کردند. در مسئله آن‌ها دو کالای قابل جایگزین وجود داشت. در مسئله آن‌ها تقاضا احتمالی بوده و از مدل‌های صف برای سیستم موجودی خود استفاده کردند. بورنتس و کاناوتس [۷] مسئله سفارش هم‌زمان چند کالا را با جایگزینی و محدودیت کمبود با زمان سفارش دهی هم‌زمان در نظر گرفتند و در دو حالت قطعی و غیرقطعی از مدل‌های زنجیره زمانی مارکوف برای تعیین سطح موجودی استفاده کردند. مداح و همکاران [۸] مسئله مقدار سفارش اقتصادی را همراه با چند کالای قابل جایگزین در نظر گرفتند که مدل بهینه‌سازی مقدار سفارش اقتصادی هر کالا تحت اثرات جایگزینی با هدف کمینه کردن هزینه‌های راه‌اندازی و نگهداری و کمبود را معرفی کردند. آن‌ها یک مدل‌سازی ریاضی غیرخطی برای مسئله معرفی کرده و محدب بودن مدل را بررسی کردند و آنالیز حساسیت بر روی پارامترهای متفاوت هزینه برای بررسی تأثیر آن بر سیاست سفارش دهی را بررسی کرده و نشان دادند که جایگزینی راهی مؤثر برای کاهش هزینه‌های سفارش دهی و نگهداری و حمل‌ونقل و کمبود است. پاسترناک و درانزر [۹] مسئله سفارش دهی هم‌زمان چند کالا با قابلیت جایگزینی با تقاضای

غیرقطعی را در نظر گرفتند. جایگزینی در مسئله آن‌ها باعث می‌شد که درآمد کالاها تغییر کند. آن‌ها مسئله جایگزینی یک کالا را با حالتی که جایگزینی وجود ندارد مقایسه کردند و نشان دادند که مقدار سفارش و درآمد آن‌ها می‌تواند کاهش یا افزایش پیدا کند. گیری و همکاران [۱۰] حالتی را در نظر گرفتند که تقاضای دو کالای قابل جایگزین در هنگامی که هر دو کالا موجودی خالص مثبت دارند به قیمت یکدیگر وابسته است و در هنگام مواجهه با کمبود بخشی از تقاضا با کالای جایگزین تأمین می‌شود. آن‌ها نتیجه‌گیری کردند که اختلاف میان پارامتر میزان حساسیت تقاضا به قیمت در دو کالا نقش تعیین‌کننده‌ای در اندازه انباشته سفارش اقلام دارد. مختاری [۱۱] به ارائه مدلی پرداخت که دو کالای مکمل و یک کالای جایگزین وجود دارد و نتیجه‌گیری کردند که بررسی هم‌زمان آن‌ها منجر به کاهش هزینه‌ها نسبت به مدل ساده سفارش اقتصادی شده است. راجش و وینود میشر [۱۲] فرض فسادپذیری را به دو کالای مکمل و یک کالای جایگزین اضافه کردند. توینتر و کوپرز [۱۳] به بررسی دو کالای قابل جایگزین در شرایطی پرداختند که الزامی به سیکل سفارش مشترک برای دو کالا وجود نداشت. آن‌ها حالت‌های مختلفی که هیچ جایگزینی انجام نشود، بخشی از تقاضا جایگزین شود و یا کل تقاضا جایگزین شود را با هم مقایسه کردند.

نکته دیگری که در خصوص کالاهای قابل جایگزین وجود دارد مسئله معیوب بودن کالاهاست. در تولید کالاهای مختلف به دلیل اشکال در مواد اولیه و یا فرایند تولید ممکن است کالای معیوب تولید شود. همچنین در هنگام حمل‌کالا از تأمین‌کننده به خرده‌فروش ممکن است برخی از کالاهای سالم نیز به دلیل اشکال در جابجایی دچار عیب شوند. بنابراین پس از دریافت کالاها بازرسی صورت می‌گیرد و اقلام معیوب شناسایی می‌شوند. اقلام معیوب شناسایی شده ممکن است معدوم شود، در بازار ثانویه به فروش برسد و یا برای تعمیر به فرایند تولید بازگردند. به عنوان مثال وقتی پاکت‌های بسته‌بندی استریلیزه دوغ یا شیر دچار پارگی باشد به دلیل فسادپذیری آن‌ها، اقلام معیوب قابلیت مصرف ندارند و دور ریخته می‌شوند. مقالات مختلفی مسئله سفارش دهی هم‌زمان کالاها همراه با خرابی را در سیستم مقدار سفارش اقتصادی در نظر گرفته‌اند.

سلامه و جابر [۱۴] مدلی ریاضی را توسعه دادند که هر سفارش از درصدی از قطعات معیوب تشکیل شده است و قطعات خراب با قیمت کمتری پس از بازرسی فروخته می‌شوند. گوپال و همکاران [۱۵] روش حل ساده‌ای را برای مسئله معرفی کردند و آن را با جواب بهینه مقایسه کردند. نتایج نشان می‌دادند که روش آن‌ها جواب‌هایی با انحراف کم از جواب بهینه را به دست می‌آورد. رضایی [۱۶] کمبود را در مسئله در نظر گرفتند و فرض کردند که کمبود در نتیجه برگشت از فروش قطعات معیوب در ابتدای چرخه اتفاق

افتاد. آن‌ها مدل ریاضی را توسعه دادند که هر سفارش از درصدی از قطعات معیوب تشکیل شده است و قطعات خراب با قیمت کمتری پس از بازرسی فروخته می‌شوند. گوپال و همکاران [۱۵] روش حل ساده‌ای را برای مسئله معرفی کردند و آن را با جواب بهینه مقایسه کردند. نتایج نشان می‌دادند که روش آن‌ها جواب‌هایی با انحراف کم از جواب بهینه را به دست می‌آورد. رضایی [۱۶] کمبود را در مسئله در نظر گرفتند و فرض کردند که کمبود در نتیجه برگشت از فروش قطعات معیوب در ابتدای چرخه اتفاق

و می‌تواند باعث کاهش مشتری‌های بالفعل و بالقوه سیستم شود. همچنین کمبود باعث کاهش سود می‌شود. لذا باید مکانیسم‌هایی برای کاهش کمبود و هزینه‌های آن در مسئله وجود داشته باشد. در نتیجه در نظر گرفتن کمبود و کاهش هزینه‌های آن، یک امر مهم و حیاتی در دنیای واقعی برای سازمان‌ها است تا بتوانند سود خود را افزایش داده و علاوه بر آن از نارضایتی مشتری‌ها و کاهش آن‌ها جلوگیری کند. با توجه به مطالعه ادبیات، استفاده از جایگزینی کالاها و لحاظ کردن کالاهای معیوب در فرایند تصمیم‌گیری از مکانیسم‌هایی است که می‌تواند هزینه‌های مرتبط با موجودی و کمبود کالا را مدیریت کند.

با توجه به مطالعات فوق قابل مشاهده است که مسئله سفارش هم‌زمان اقتصادی کالاها نسبتاً جایگزین به همراه خرابی و کمبود به‌صورت هم‌زمان کمتر در نظر گرفته شده است. سفارش هم‌زمان چند کالا باعث کاهش هزینه‌های سفارش دهی و نگهداری و حمل‌ونقل می‌شود. همچنین جایگزینی کالاها نیز می‌تواند باعث کاهش هزینه‌های کمبود و نگهداری موجودی شود. به این صورت که علاوه بر کاهش فروش ازدست‌رفته، باعث کاهش متوسط موجودی می‌شود و در نتیجه آن هزینه نگهداری را کاهش می‌دهد. ضمن اینکه باعث می‌شود در صورت اتمام موجودی یک کالا، دیگر نیازی به سفارش مجدد به‌صورت خاص برای آن کالا نبوده و هزینه‌های ثابت سفارش را کاهش داده، و با جایگزینی تقاضا از نارضایتی مشتری جلوگیری می‌شود. از طرف دیگر در صورتی که کالاهای معیوب در تصمیم‌گیری در نظر گرفته نشود، می‌تواند سیستم را دچار کمبود و متحمل هزینه‌های حاصل از کمبود کند.

اگرچه در هنگامی که یک کالا دچار کمبود شده و یا به علت‌های متفاوتی مانند خرابی در دسترس نیست، می‌توان برای برآورد کردن تقاضا، از کالای جایگزین استفاده کرد اما در بعضی مواقع برای جایگزینی اقلام هزینه و یا ضرری برای فروشنده وجود دارد. به‌عنوان مثال یک تولیدکننده یخچال را در نظر بگیرید که از دو نوع کمپرسور با درجه کیفیت بالا و متوسط برای تولید دو یخچال لوکس و متوسط استفاده می‌کند. در صورت عدم موجودی کمپرسورهای با کیفیت متوسط، تولیدکننده می‌تواند کمپرسورهای با کیفیت بالا را در تولید یخچال با کیفیت متوسط جایگزین کند. در این صورت اختلاف قیمت کمپرسورهای با کیفیت بالا و متوسط هزینه جایگزینی است. بنابراین هزینه جایگزینی در تصمیم‌گیری در خصوص کالاهای قابل جایگزین باید لحاظ شود.

در جدول (۱) برخی از مهم‌ترین مقالاتی که در حوزه کالاهای قابل جایگزین مطالعه کرده‌اند از لحاظ نوع جایگزینی کامل یا نسبی، تشابه یا تفاوت پارامترهای کالاها، در نظر گرفتن امکان معیوب بودن کالاها، و همچنین هزینه‌های جایگزینی و فروش ازدست‌رفته مقایسه شده‌اند.

می‌افتد. یو و همکاران [۱۷] کمبود و خرابی در چرخه تولید را در نظر گرفتند و آن را در قطعات برگشت از فروش محاسبه کردند. آن‌ها یک حد پایین برای فروش ازدست‌رفته و برگشت از فروش در مسئله در نظر گرفته و الگوریتم ابتکاری و آنالیز عددی را برای حل مسئله پیشنهاد کردند. پاچریستوس و کونتاراس [۱۸] فرض کردند که قطعات معیوب در انتهای بازرسی به فروش می‌رود. بنابراین در مسئله آن‌ها یک هزینه نگهداری تا پایان زمان بازرسی برای قطعات معیوب وجود دارد. مداح و جابر [۱۹] قطعات معیوب را در چرخه در نظر گرفته و فرض کردند که هزینه نگهداری و حمل و نقل برای این قطعات در طول چرخه اتفاق می‌افتد.

مداح و همکاران [۲۰] برای دوری از کمبود فرض کردند که سفارش دهی زمانی که سطح موجودی فقط به اندازه تقاضای زمان بازرسی است انجام شود. آن‌ها یک زنجیره غیرقطعی را در نظر گرفتند و مقدار تقاضا در زمان بازرسی را از دوره‌های قبل محاسبه کردند. سان [۲۱] یک زنجیره تأمین سه سطحی برای تعیین قطعات معیوب از تأمین‌کننده و فروشنده هنگامی که نرخ تقاضای فروشنده ثابت نیست را در نظر گرفت. او فرض کرد که در همه قسمت‌های زنجیره تأمین مقدار اندازه سفارش به‌صورت نامساوی به علت خرابی به قسمت‌های بعدی منتقل می‌شود. پاول و همکاران [۲۲] مسئله اثر درصد اقلام معیوب و خرابی بر روی سیاست سفارش دهی را بررسی کردند. آن‌ها دو سناریو برای مسئله در نظر گرفتند. سناریو با تخفیف قیمت فروش و سناریو بدون تخفیف قیمت فروش. برای هر سناریو الگوریتمی برای مشخص کردن طول چرخه گروه اقلام و تعداد صحیح فواصل زمانی که سفارش مجدد در آن اتفاق می‌افتد را معرفی کردند. حیدری و همکاران [۲۳] مسئله سفارش هم‌زمان کالاها را همراه با خرابی در نظر گرفتند. در مسئله آن‌ها سفارش‌ها دارای یک تابع توزیع تصادفی از خرابی بودند و تعدادی از کالاها به علت خرابی از بین می‌رفتند. هنگام دریافت یک سفارش توسط خرده‌فروش، عمل بازرسی برای تشخیص قطعات معیوب انجام می‌شود. آن‌ها یک مدل ریاضی برای مسئله توسعه دادند که کمبود در آن مجاز نبوده و برای این امر هنگامی که سطح موجودی به اندازه تقاضای موجود در زمان بازرسی است، سفارش مجدد داده می‌شود. سپس کمبود را در نظر گرفته و یک مدلی را برای ترکیب کالای برگشت از فروش توسعه دادند. بومیک [۲۴] مدل موجودی همراه با خرابی تک دوره‌ای با تقاضای احتمالی وابسته به قیمت و اندازه انباشته جزئی همراه با کمبود را در نظر گرفت. در مسئله او برگشت از فروش یک تابع غیرخطی غیر افزایشی از اندازه کمبود است. او دو حالت برای قطعات معیوب خود در نظر گرفت. حالت اول خرابی یک تابع توزیع نمایی است و در حالت دوم یک تابع توزیع یکنواخت است.

مسئله کمبود یک امر مهم در مسائل دنیای واقعی است. کمبود باعث عدم تأمین تقاضای مشتری شده و نارضایتی آن را در پی دارد

در مدل‌سازی این مسئله طول دوره بهینه سیکل سفارش و زمان جایگزینی حائز اهمیت است. با در نظر گرفتن این موارد پارامترها و متغیرها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

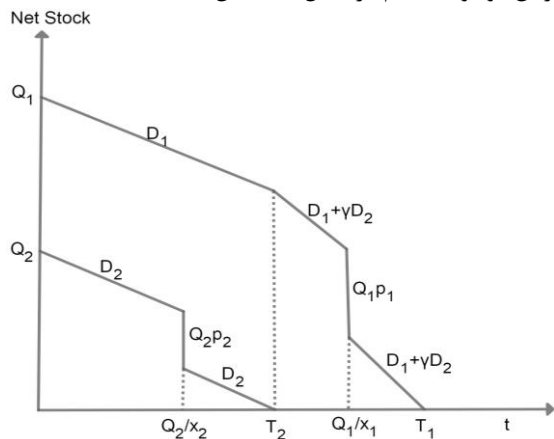
#### پارامترها:

$D_1$	تقاضای کالای ۱
$D_2$	تقاضای کالای ۲
$\gamma$	درصد جایگزینی از کالای ۲ به ۱
$h_1$	هزینه نگهداری هر واحد کالای ۱
$h_2$	هزینه نگهداری هر واحد کالای ۲
$A_1$	هزینه ثابت سفارش در هر بار سفارش کالای ۱
$A_2$	هزینه ثابت سفارش در هر بار سفارش کالای ۲
$\pi'$	هزینه جایگزینی
$\pi$	هزینه فروش ازدست‌رفته
$p_1$	کسری از کالای ۱ که معیوب است
$p_2$	کسری از کالای ۲ که معیوب است
$x_1$	نرخ بازرسی کالای ۱
$x_2$	نرخ بازرسی کالای ۲

#### متغیرها:

$T_1$	سیکل سفارش کالای ۱
$T_2$	سیکل سفارش کالای ۲
$Q_1$	اندازه انباشته کالای ۱
$Q_2$	اندازه انباشته کالای ۲
$IL_{1f}(t)$	موجودی خالص کالای ۱ در لحظه $t$ در بازه $j$
$IL_{2f}(t)$	موجودی خالص کالای ۲ در لحظه $t$ در بازه $j$
$\bar{I}_1$	متوسط موجودی کالای ۱ در واحد زمان
$\bar{I}_2$	متوسط موجودی کالای ۲ در واحد زمان
$b_L$	مقدار تقاضای کالای ۲ در هر سیکل که ازدست‌رفته است
$b_S$	مقدار تقاضای کالای ۱ در هر سیکل که با کالای ۱ جایگزین شده است

جریان موجودی اقلام در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱): جریان موجودی کالای ۱ و ۲

جدول (۱): مقایسه مقالات مختلف در حوزه کالاهای قابل جایگزین

مرجع	جایگزینی نسبی	پارامترهای متفاوت اقلام	کالای معیوب	هزینه جایگزینی	فروش ازدست‌رفته
[۸]	✓	✓	×	✓	✓
[۱۱]	×	✓	×	×	×
[۱۲]	✓	✓	×	✓	✓
[۱۳]	×	×	×	✓	×
[۱۴]	✓	✓	×	×	✓
[۲۵]	×	×	✓	✓	×
این پژوهش	✓	✓	✓	✓	✓

همان‌طور که در جدول (۱) نیز مشخص است، در این پژوهش به مدل‌سازی مسئله سفارش هم‌زمان اقلام نسبتاً جایگزین با در نظر گرفتن خرابی و فروش ازدست‌رفته پرداخته شده است. هنگامی که موجودی کالا به صفر می‌رسد بخشی از تقاضای کالا از کالای جایگزین تأمین می‌شود. فروش ازدست‌رفته به این شکل است که درصدی از تقاضا بعد از اتمام موجودی از طریق جایگزینی برآورده می‌شود و درصدی از آن فروش ازدست‌رفته می‌شود. همچنین خرابی به این صورت است که پس از بازرسی، اقلام به دو دسته کالاهای معیوب و سالم تقسیم می‌شود و کالاهای معیوب پس از اتمام زمان بازرسی معدوم می‌شود. همچنین در این پژوهش هزینه جایگزینی نیز لحاظ شده است

در ادامه و در بخش ۲ مدل‌سازی مسئله ارائه می‌شود. سپس حالت‌های خاص و حل تحلیلی مدل در بخش ۳ بیان می‌شود. بخش ۴ به ارائه مثال عددی و تحلیل حساسیت مدل می‌پردازد. در نهایت در بخش ۵ نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

## ۲- مدل‌سازی

دو کالا را لحاظ کنید که هم‌زمان سفارش داده می‌شوند و نسبتاً جایگزین یکدیگر هستند. کالای اول کالای اصلی بوده و دچار کمبود نمی‌شود اما کالای دوم در صورتی که دچار کمبود شود می‌تواند بخشی از تقاضای خود را از کالای اول تأمین کند.

مفروضات مدل به شرح زیر است:

- پارامترهای مدل قطعی و ثابت است.
- هزینه جایگزینی لحاظ شده است.
- درصد اقلام معیوب در هر انباشته ثابت در نظر گرفته شده است.
- بخشی از کمبود با جایگزینی جبران و بخشی از آن فروش ازدست‌رفته می‌شود.
- اقلام معیوب بعد از اتمام بازرسی معدوم می‌شود.

$$IL_{11}(t) = \frac{D_1 T_1 + \gamma D_2 T_1 - \gamma D_2 T_2}{1 - p_1} \quad 0 \leq t \leq T_2 \quad (8)$$

$$IL_{12}(t) = \frac{D_1 T_1 + \gamma D_2 T_1 - \gamma D_2 T_2}{1 - p_1} - D_1 t \quad T_2 \leq t \leq \frac{Q_1}{x_1} \quad (9)$$

$$IL_{13}(t) = (D_1 + \gamma D_2)(T_1 - t) \quad \frac{Q_1}{x_1} \leq t \leq T_1 \quad (10)$$

$$IL_{21}(t) = \frac{D_2 T_2}{1 - p_2} - D_2 t \quad 0 \leq t \leq \frac{Q_2}{x_2} \quad (11)$$

$$IL_{22}(t) = D_2(T_2 - t) \quad \frac{Q_2}{x_2} \leq t \leq T_2 \quad (12)$$

در ادامه متوسط موجودی کالای ۱ و ۲، میزان فروش از دست‌رفته و میزان کالای جایگزین شده محاسبه می‌شوند که به ترتیب بر اساس روابط (۱۳) تا (۱۶) بیان شده‌اند.

$$\bar{I}_1 = \left(\frac{1}{T_1}\right) \left[ \int_0^{T_2} IL_{11}(t) dt + \int_{T_2}^{\frac{Q_1}{x_1}} IL_{12}(t) dt + \int_{\frac{Q_1}{x_1}}^{T_1} IL_{13}(t) dt \right] = \frac{(D_1 + \gamma D_2) T_1}{2} + \frac{p_1 [D_1 T + \gamma D_2 (T_1 - T_2)]^2}{x_1 T_1 (1 - p_1)^2} - \frac{\gamma D_2 T_2^2}{2 T_1} \quad (13)$$

$$\bar{I}_2 = \left(\frac{1}{T_1}\right) \left[ \int_0^{\frac{Q_2}{x_2}} IL_{21}(t) dt + \int_{\frac{Q_2}{x_2}}^{T_2} IL_{22}(t) dt \right] = \frac{D_2 T_2^2}{2 T_1} + \frac{(D_2 T_2)^2 p_2}{[1 - p_2]^2 T_1 x_2} \quad (14)$$

$$b_L = D_2(1 - \gamma)(T_1 - T_2) \quad (15)$$

$$b_S = D_2 \gamma (T_1 - T_2) \quad (16)$$

برای اینکه بازرسی کالا قبل از انتهای سیکل به پایان برسد همان‌طور که در [۲۵] اشاره شده است باید رابطه (۱۷) میان پارامترها برقرار باشد که به‌عنوان پیش‌فرض لحاظ می‌شود.

$$p_i \leq 1 - \frac{D_i}{x_i} \quad \forall x_i \in \{1, 2\} \quad (17)$$

تابع هدف و محدودیت‌ها به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min } TC &= h_1 \bar{I}_1 + h_2 \bar{I}_2 \\ &+ \frac{A_1 + A_2 + \pi b_L + \pi' b_S}{T_1} \end{aligned} \quad (18)$$

s.t.

$$T_2 \leq T_1 \quad (19)$$

$$T_1, T_2 \geq 0 \quad (20)$$

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده، بعد از اتمام موجودی کالای ۲ در زمان  $T_2$ ، بخشی از تقاضای آن با کالای ۱ جایگزین شده است و بنابراین نرخ مصرف کالای ۱ افزایش یافته است. در ادامه، بازرسی کالای ۱ نیز به اتمام رسیده و نهایتاً در انتهای سیکل، موجودی کالای ۱ نیز به صفر می‌رسد.

در یک حالت دیگر، در صورتی که نرخ بازرسی کالای ۱ ( $x_1$ ) به اندازه کافی زیاد باشد ممکن است که زمان اتمام بازرسی کالای ۱ ( $\frac{Q_1}{x_1}$ ) قبل از اتمام موجودی کالای ۲ حادث شود ( $\frac{Q_1}{x_1} < T_2$ ). بنابراین تعویض کالای ۲ با کالای ۱ بعد از زمان بازرسی کالای ۱ انجام شود. توجه کنید که میزان اقلام سالم از کالای ۱ در هر دو حالت یکسان است بنابراین در زمانی که کالای ۲ با کمبود مواجه می‌شود تعویض آن با کالای ۱ سالم انجام خواهد شد. لذا در عمل تفاوتی در سیاست بهینه دو حالت رخ نمی‌دهد. این موضوع در مقاله مخوپادوای [۲۵] نیز بیان شده است. بنابراین در مدل‌سازی مسئله تنها همان حالت اول بیان می‌شود که در شکل (۱) نشان داده شده است. معادله دیفرانسیل کالاهای ۱ و ۲ در بازه‌های مختلف در جدول (۲) نشان داده شده است:

جدول (۲): معادلات دیفرانسیل و شروط اولیه موجودی خالص کالای

۱ و ۲ در بازه‌های مختلف

معادله دیفرانسیل	بازه زمانی	شروط اولیه	
$\frac{dIL_{11}(t)}{dt} = -D_1$	$0 \leq t \leq T_2$	$IL_{11}(0) = Q_1$	(۱)
$\frac{dIL_{12}(t)}{dt} = -D_1 - \gamma D_2$	$T_2 \leq t \leq \frac{Q_1}{x_1}$	$IL_{12}(T_2) = IL_{11}(T_2)$	(۲)
$\frac{dIL_{13}(t)}{dt} = -D_1 - \gamma D_2$	$\frac{Q_1}{x_1} \leq t \leq T_1$	$IL_{13}\left(\frac{Q_1}{x_1}\right) = IL_{12}\left(\frac{Q_1}{x_1}\right)$ $IL_{13}(T_1) = 0$	(۳)
$\frac{dIL_{21}(t)}{dt} = -D_2$	$0 \leq t \leq \frac{Q_2}{x_2}$	$IL_{21}(0) = Q_2$	(۴)
$\frac{dIL_{22}(t)}{dt} = -D_2$	$\frac{Q_2}{x_2} \leq t \leq T_2$	$IL_{22}\left(\frac{Q_2}{x_2}\right) = IL_{21}\left(\frac{Q_2}{x_2}\right)$ $IL_{22}(T_2) = 0$	(۵)

با حل معادلات دیفرانسیل و اعمال شروط اولیه روابط زیر به دست می‌آید:

$$Q_1 = \frac{D_1 T_1 + \gamma D_2 T_1 - \gamma D_2 T_2}{1 - p_1} \quad (6)$$

$$Q_2 = \frac{D_2 T_2}{1 - p_2} \quad (7)$$

$$\frac{\delta^2 TC}{\delta T_1^2} = \frac{U}{T_1^3(h_2 - h_1\gamma)} \quad (۲۷)$$

بنابراین باید پس از محاسبه مقادیر  $T_1$  و  $T_2$  آن‌ها را با هم مقایسه کرد. اگر  $T_2 < T_1$  بود یعنی مقادیر محاسبه شده جواب بهینه تابع هستند. در غیر این صورت یعنی محدودیت مسئله بهینه‌سازی کارکردی است و بنابراین باید مقدار  $T_1$  و  $T_2$  را برابر فرض کرده و مسئله مجدد حل شود. برای این موضوع حالت خاص دوم می‌تواند مفید باشد.

### حالت دوم) کمبود کالا مجاز نباشد

در این حالت عملاً جایگزینی اتفاق نمی‌افتد و  $T_1 = T_2$  خواهد بود که با جایگذاری آن در تابع هزینه کل خواهیم داشت:

$$TC = \frac{A_1 + A_2}{T_1} + \left( \frac{D_1 h_1 + D_2 h_2}{2} + \frac{D_1^2 h_1 p_1}{x_1(1-p_1)^2} + \frac{D_2^2 h_2 p_2}{x_2(1-p_2)^2} \right) T_1 \quad (۲۸)$$

مقدار بهینه  $T_1$  از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$T_1 = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{\frac{D_1 h_1 + D_2 h_2}{2} + \frac{D_1^2 h_1 p_1}{x_1(1-p_1)^2} + \frac{D_2^2 h_2 p_2}{x_2(1-p_2)^2}}} \quad (۲۹)$$

مشتق دوم تابع نسبت به  $T_1$  طبق رابطه (۳۰) به دست می‌آید که همواره مثبت است. بنابراین مقادیر محاسبه شده مینیمم کلی تابع خواهند بود.

$$\frac{\delta^2 TC}{\delta T_1^2} = \frac{2(A_1 + A_2)}{T_1^3} \quad (۳۰)$$

برای حل تحلیلی مدل در حالت کلی نیاز است که مشتقات تابع هزینه کل نسبت متغیرها محاسبه شده و برابر صفر قرار داده شود و سپس معین مثبت بودن هشین تابع در نقطه اکسترمم به دست آمده بررسی شود. در ادامه جواب‌های به دست آمده در محدودیت مسئله بررسی می‌شوند. اگر جواب‌های به دست آمده در محدودیت صدق نکرد، محدودیت کارکردی شده و مدل مجدداً در حالت خاص حل می‌شود. در حل معادلات به دست آمده از مشتق‌گیری تابع نسبت به  $T_1$  و  $T_2$  پاسخ پارامتری مستقل به دست نیامد. به عبارت دیگر مقدار بهینه  $T_1$  برحسب  $T_2$  و همچنین مقدار بهینه  $T_2$  برحسب  $T_1$  به دست می‌آید. مقدار  $T_2$  از رابطه (۳۱) به دست می‌آید که در آن مقادیر  $V$  و  $W$  از روابط (۳۲) و (۳۳) به دست می‌آیند.

$$T_2 = \frac{V}{W} \quad (۳۱)$$

$$V = x_2(1-p_2)^2 [2D_1 T_1 \gamma h_1 p_1 + 2D_2 T_1 \gamma^2 h_1 p_1 + \gamma p_1^2 \pi' x_1 - \gamma p_1^2 \pi x_1 - 2\gamma p_1 \pi' x_1 + 2\gamma p_1 \pi x_1 + \gamma \pi' x_1 - \gamma \pi x_1 + p_1^2 \pi x_1 - 2p_1 \pi x_1 + \pi x_1] \quad (۳۲)$$

### ۳- حل تحلیلی و حالت‌های خاص

ابتدا مسئله در حالت‌های خاص به صورت تحلیلی حل شده و سپس الگوریتم حل مسئله در حالت کلی بیان می‌شود.

#### حالت اول) اگر درصد اقلام معیوب برابر صفر باشد

با قرار دادن صفر به جای پارامترهای  $p_1$  و  $p_2$  در تابع هزینه کل رابطه (۲۱) به دست می‌آید.

$$TC = h_1 \left( \frac{(D_1 + \gamma D_2) T_1}{2} - \frac{\gamma D_2 T_2^2}{2T_1} \right) + h_2 \frac{D_2 T_2^2}{2T_1} + \frac{A_1 + A_2 + \pi D_2 (1-\gamma)(T_1 - T_2) + \pi' D_2 \gamma (T_1 - T_2)}{T_1} \quad (۲۱)$$

با مشتق‌گیری از هزینه کل نسبت به  $T_2$  و حل آن خواهیم داشت:

$$T_2 = \frac{\pi(1-\gamma) + \pi'\gamma}{h_2 - h_1\gamma} \quad (۲۲)$$

برای اینکه  $T_2$  مقدار مثبتی داشته باشد باید رابطه (۲۳) برقرار باشد

$$h_2 - h_1\gamma \geq 0 \quad (۲۳)$$

مشتق دوم تابع هزینه کل نسبت به  $T_2$  بر اساس رابطه (۲۴) به دست می‌آید که همواره مثبت است. بنابراین تابع برحسب  $T_2$  محدب است و با توجه به اینکه مقدار  $T_2$  بر اساس پارامترهای مدل به دست آمد می‌توان آن را در تابع هزینه کل جایگزین کرده و نسبت به  $T_1$  مشتق‌گیری کرد.

$$\frac{D_2(h_2 - h_1\gamma)}{T_1} \geq 0 \quad (۲۴)$$

با جایگذاری  $T_2$  در تابع هزینه کل و سپس با حل مشتق تابع مقدار  $T_1$  بر اساس رابطه (۲۵) به دست می‌آید.

$$T_1 = \sqrt{\frac{U}{h_1(D_1 + \gamma D_2)(h_2 - h_1\gamma)}} \quad (۲۵)$$

که در این رابطه مقدار  $U$  بر اساس رابطه (۲۶) محاسبه می‌شود که باید مقداری مثبت داشته باشد. اگر  $U$  منفی باشد یعنی مشتق تابع هزینه کل ریشه ندارد و جواب بهینه در مرزهای تابع که در اینجا  $T_1 = 0$  است خواهد بود که به معنی آن است که همه تقاضا باید دچار کمبود شود و داشتن سیستم موجودی هزینه بیشتری نسبت به هزینه‌های فرصت خواهد داشت.

$$U = -2A_1\gamma h_1 + 2A_1 h_2 - 2A_2\gamma h_1 + 2A_2 h_2 - D_2(\gamma\pi')^2 + 2D_2\gamma^2\pi'\pi - D_2(\gamma\pi)^2 - 2D_2\gamma\pi'\pi + 2D_2\gamma\pi^2 - D_2\pi^2 \quad (۲۶)$$

مشتق دوم تابع نسبت به  $T_1$  بر اساس رابطه (۲۷) به دست می‌آید که همواره مثبت است.

با استفاده از حل دو معادله ۳۷ و ۳۸ مقادیر متغیرهای  $T_1$  و  $T_2$  به دست می‌آید که در جدول (۴) ارائه شده است.

جدول (۴): مقادیر بهینه متغیرهای مثال عددی

$T_1$	$T_2$	$TC$
۰/۹۸۵	۰/۵۶۲	۴۵۵/۵۶۳

برای اطمینان از بهینگی، جواب‌های به‌دست‌آمده در شرایط بهینگی بررسی شده‌اند. با توجه به اینکه مشتق اول تابع هزینه کل در نقطه به‌دست‌آمده برابر صفر بوده و هشین تابع در آن نقطه معین مثبت است. بنابراین نقطه به‌دست‌آمده مینیمم تابع هزینه است. بررسی این شرایط در روابط (۳۶) تا (۳۸) داده شده است.

$$\frac{\partial TC}{\partial T_1} = \frac{\partial TC}{\partial T_2} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial T_1^2} = 350.9 > 0 \quad (37)$$

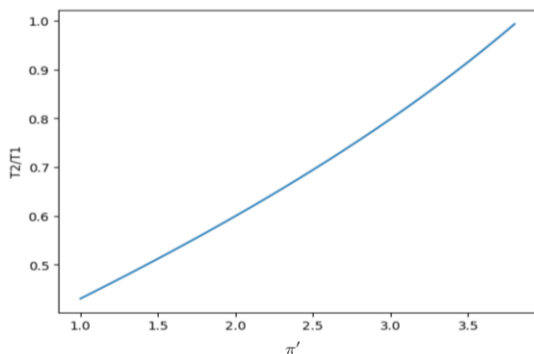
$$\left(\frac{\partial^2 TC}{\partial T_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 TC}{\partial T_2^2}\right) - \left[\left(\frac{\partial^2 TC}{\partial T_1 \partial T_2}\right)\right]^2 = 73077.4 > 0 \quad (38)$$

#### ۴-۱-۱- تحلیل حساسیت

در این قسمت با تغییر پارامترها به تحلیل مدل پرداخته می‌شود. برای این منظور اثر تغییر پارامترها بر هزینه کل و همچنین سطح سرویس کالای دوم بررسی می‌شود. منظور ما از سطح سرویس کالای دوم نسبت  $T_2$  به  $T_1$  است که بیان می‌کند چه کسری از زمان کالای دوم موجودی خالص مثبت دارد.

#### ۴-۱-۱-۱- افزایش هزینه جایگزینی

همان‌طور که در شکل (۲) مشخص است با افزایش هزینه‌های جایگزینی سطح سرویس کالای دوم افزایش می‌یابد. به‌عبارت‌دیگر مدل تلاش می‌کند در هنگام بالا بودن هزینه جایگزینی، مقدار کمتری از کالای دوم دچار کمبود شود بنابراین نسبتی از زمان که کالای دوم موجودی خالص مثبت دارد افزایش می‌یابد.



شکل (۲): تغییرات سطح سرویس کالای دوم به ازای مقادیر مختلف هزینه جایگزینی

$$W = 2D_2\gamma^2 h_1 p_1 p_2^2 x_2 - 4D_2\gamma^2 h_1 p_1 p_2 x_2 \quad (33)$$

$$+ 2D_2\gamma^2 h_1 p_1 x_2$$

$$+ 2D_2 h_2 p_1^2 p_2 x_1$$

$$- 4D_2 h_2 p_1 p_2 x_1$$

$$+ 2D_2 h_2 p_2 x_1$$

$$- \gamma h_1 p_1^2 p_2^2 x_1 x_2$$

$$+ 2\gamma h_1 p_1^2 p_2 x_1 x_2$$

$$- \gamma h_1 p_1^2 x_1 x_2$$

$$+ 2\gamma h_1 p_1 p_2^2 x_1 x_2$$

$$- 4\gamma h_1 p_1 p_2 x_1 x_2$$

$$+ 2\gamma h_1 p_1 x_1 x_2$$

$$- \gamma h_1 p_2^2 x_1 x_2$$

$$+ 2\gamma h_1 p_2 x_1 x_2 - \gamma h_1 x_1 x_2$$

$$+ h_2 p_1^2 p_2^2 x_1 x_2$$

$$- 2h_2 p_1^2 p_2 x_1 x_2$$

$$+ h_2 p_1^2 x_1 x_2$$

$$- 2h_2 p_1 p_2^2 x_1 x_2$$

$$+ 4h_2 p_1 p_2 x_1 x_2$$

$$- 2h_2 p_1 x_1 x_2 + h_2 p_2^2 x_1 x_2$$

$$- 2h_2 p_2 x_1 x_2 + h_2 x_1 x_2$$

با توجه به اینکه پس از مشتق‌گیری مدل در حالت کلی نسبت به متغیرها، فرمول به‌دست‌آمده برای متغیرها مستقل از متغیرهای دیگر به دست نیامده است، باید از یک نرم‌افزار برای حل دو معادله دو مجهول به‌دست‌آمده استفاده کرد. در ضمن، از آنجاکه تابع هزینه کل تنها از دو متغیر تشکیل شده است و تنها یک محدودیت در مدل وجود دارد، بسیاری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی توانایی یافتن جواب بهینه تابع هزینه کل را دارند. به هر صورت فرمول تحلیلی برای مقدار بهینه متغیرها که تنها بر اساس پارامترها بیان شود در حالت‌های خاص مدل یافت شد.

#### ۴- مثال عددی و تحلیل حساسیت

در این قسمت یک مثال عددی در نظر گرفته شده و تحلیل حساسیت آن انجام شده است. داده‌های مسئله در جدول (۳) داده شده است.

جدول (۳): مقادیر پارامترهای مثال عددی

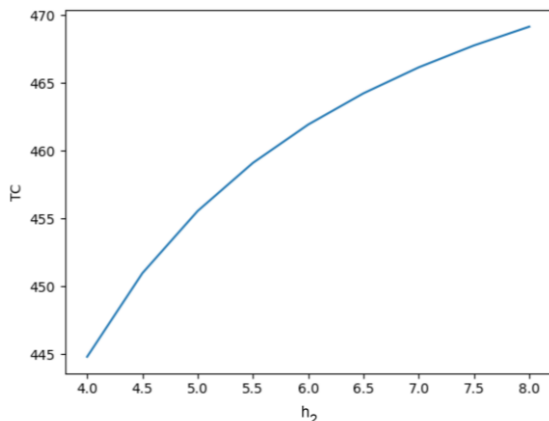
$A_1$	۱۰۰	$x_1$	۱۶۰۰۰	$\gamma$	۰/۶
$A_2$	۱۰۰	$x_2$	۱۶۰۰۰	$\pi$	۳
$D_1$	۲۰۰	$h_1$	۱/۵	$\pi'$	۱/۸۴
$D_2$	۵۰	$h_2$	۵		
$p_1$	۰/۰۶	$p_2$	۰/۰۶		

برای حل بهینه تابع هزینه کل در حالت کلی باید دو معادله دو مجهول حاصل از مشتقات جزئی تابع هدف حل شود. با قرار دادن مقادیر عددی پارامترها در تابع هدف، و حل معادلات حاصل از مشتق‌گیری تابع هدف نسبت به  $T_1$  و  $T_2$  روابط ۳۴ و ۳۵ به دست می‌آید.

$$T_2 = 0.000428T_1 + 0.56123 \quad (34)$$

$$T_1 = 1.0757 \sqrt{0.51279T_2^2 - 0.57559T_2 + 1} \quad (35)$$

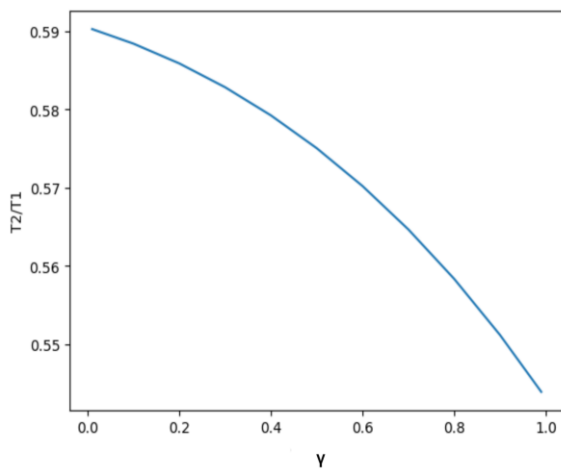




شکل (۵): تغییرات هزینه کل سیستم به ازای مقادیر مختلف هزینه نگهداری

#### ۴-۱-۳- افزایش درصد جایگزینی

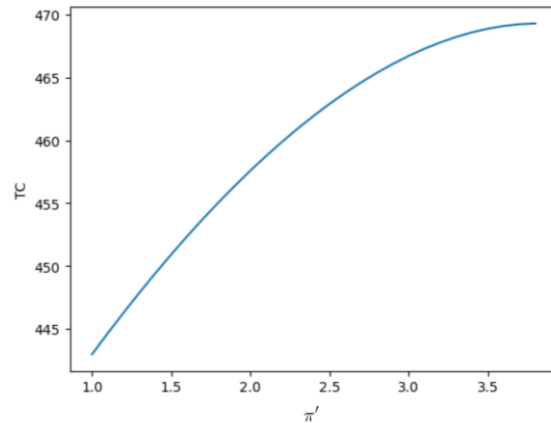
همان‌طور که در شکل (۶) مشخص است با افزایش درصد جایگزینی کالای دوم، سطح سرویس کالای دوم کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر مدل تلاش می‌کند در هنگام بالا بودن درصد جایگزینی، مقدار کمتری از کالای دوم نگهداری کند و بیشتر از امکان جایگزینی استفاده کند.



شکل (۶): تغییرات سطح سرویس کالای دوم به ازای مقادیر مختلف درصد جایگزینی

اثر افزایش درصد جایگزینی بر هزینه کل در شکل (۷) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۷) مشخص است با افزایش درصد جایگزینی هزینه کل در ابتدا افزایش پیدا کرده و سپس کاهش یافته است. بنابراین افزایش یا کاهش درصد جایگزینی اقلام می‌تواند اثرات متفاوتی داشته باشد و این به پارامترهای مدل بستگی دارد. از این رو، اگر درصد جایگزینی به عنوان متغیر تصمیم در نظر گرفته شود می‌توان مقدار بهینه آن را تعیین کرد.

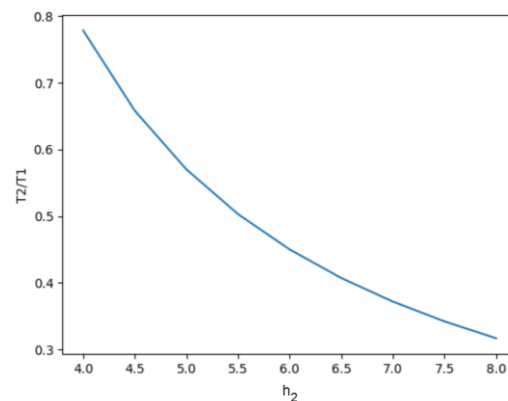
اثر افزایش هزینه جایگزینی بر هزینه کل در شکل (۳) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۳) مشخص است با افزایش هزینه‌های جایگزینی هزینه کل افزایش پیدا می‌کند. به تعبیر دیگر با کاهش هزینه‌های جایگزینی منافع بیشتری برای شرکت در بهره‌مندی از امکان تعویض فراهم می‌شود.



شکل (۳): تغییرات هزینه کل سیستم به ازای مقادیر مختلف هزینه جایگزینی

#### ۴-۱-۲- افزایش هزینه نگهداری

همان‌طور که در شکل (۴) مشخص است با افزایش هزینه‌های نگهداری کالای دوم، سطح سرویس کالای دوم کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر مدل تلاش می‌کند در هنگام بالا بودن هزینه نگهداری، مقدار کمتری از کالای دوم نگهداری کند و بیشتر از امکان جایگزینی استفاده کند.



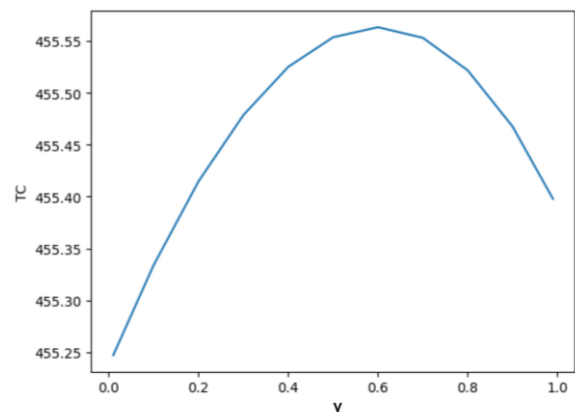
شکل (۴): تغییرات سطح سرویس کالای دوم به ازای مقادیر مختلف هزینه نگهداری

اثر افزایش هزینه نگهداری بر هزینه کل در شکل (۵) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۵) مشخص است با افزایش هزینه‌های نگهداری هزینه کل افزایش پیدا می‌کند.

کرد. همچنین درصد جایگزینی اقلام می‌تواند وابسته به سطح موجودی و یا قیمت کالای جایگزین باشد که می‌تواند شروع خوبی برای مطالعات آتی باشد.

## ۶- مراجع

- [1] M. Erfanian, and B. Bayani, "Simulation Based Optimization Multi Echelon Inventory system with uncertain and prioritize Demand", *Iranian Journal of Supply Chain Management*, vol. 20, no. 61, pp. 29-33, 2019, DOR: 20.1001.1.20089198.1397.20.61.3.6. [In Persian]
- [2] Z. Drezner, H. Gurnani, and B.A. Pasternack, "An EOQ model with substitutions between products", *J. Oper. Res. Soc.*, vol. 46, no. 7, pp. 887-891, 1995, <https://doi.org/10.1057/jors.1995.120>.
- [3] H. Gurnani, and Z. Drezner, "Deterministic hierarchical substitution inventory models", *J. Oper. Res. Soc.*, vol. 51, no. 1, pp. 129-133, 2000, <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600843>.
- [4] H. Y. Kang, A.H. Lee, and C.M. Lai, "An integrated replenishment model with quantity discounts, reentry and downward substitution for control wafers", *J. Intell. Manuf.*, vol. 23, no. 5, pp. 1745-176, 2012, <https://doi.org/10.1007/s10845-010-0479-z>.
- [5] A. A. Taleizadeh, M. Noori-daryan, and L.E. Cárdenas-Barrón, "Joint optimization of price, replenishment frequency, replenishment cycle and production rate in vendor managed inventory system with deteriorating items", *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 159, pp. 285-295, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2014.09.009>
- [6] S. M. Seyedhoseini, R. Rashid, I. Kamalpour, and E.Zangeneh, "Application of queuing theory in inventory systems with substitution flexibility", *J. Ind. Eng. Int.*, vol. 11, pp. 37-44, 2015, <https://doi.org/10.1007/s40092-015-0099-5>.
- [7] A. Burnetas, and O. Kanavetas, "Inventory policies for two products under Poisson demand: Interaction between demand substitution, limited storage capacity and replenishment time uncertainty", *Nav. Res. Logist.*, vol. 65, no. 8, pp. 676-698, 2018, <https://doi.org/10.1002/nav.21788>.
- [8] B. Maddah, M. Kharbeche, S. Pokharel, and A. Ghoniem, "Joint replenishment model for multiple products with substitution", *Appl. Math. Model.*, vol. 40, no. 17-18, pp. 7678-7688, 2016, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.03.027>.
- [9] B.A. Pasternack, and Z. Drezner, "Optimal inventory policies for substitutable commodities with stochastic demand", *Nav. Res. Logist.*, vol. 38, no. 2, pp. 221-240, 1991, [https://doi.org/10.1002/1520-6750\(199104\)38:2%3C221::AID-NAV3220380208%3E3.0.CO;2-7](https://doi.org/10.1002/1520-6750(199104)38:2%3C221::AID-NAV3220380208%3E3.0.CO;2-7)
- [10] R. N. Giri, S. K. Mondal, and M. Maiti, "Joint replenishment model of both-ways and one-way substitution among products in fixed time horizon", *Int. J. Math. Oper. Res.*, vol. 14, no. 1, pp. 30-52, 2019, <https://doi.org/10.1504/IJMOR.2019.096977>.
- [11] H. Mokhtari, "Economic order quantity for joint complementary and substitutable items", *Int. J. Math. Comput. Simul.*, vol. 154, pp. 34-47, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2018.06.004>.
- [12] R. K. Mishra, and V. K. Mishra, "Effect of Deterioration and Partial Substitution on Optimal Inventory Decisions for Complementary and Substitutable Items with Cost of Substitution under Joint Replenishment", *Int. J. Inf. Manag. Sci.*, vol. 31, no. 4, pp. 393-422, 2020, [https://doi.org/10.6186/IJIMS.202012\\_31\(4\).0005](https://doi.org/10.6186/IJIMS.202012_31(4).0005).
- [13] R. H. Teunter, and S. Kuipers, "Inventory control with demand substitution: new insights from a two-product Economic Order Quantity analysis", *Omega*, vol. 113, pp. 102712, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.omega.2022.102712>
- [14] M. Salameh, and M. Jaber, "Economic production quantity model for items with imperfect quality", *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 64, no. 1, pp. 59-64, 2000, [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(99\)00044-4](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(99)00044-4).
- [15] S. K. Goyal, and L. E. Cárdenas-Barrón, "Note on: economic production quantity model for items with imperfect quality-a



شکل (۷): تغییرات هزینه کل سیستم به ازای مقادیر مختلف درصد جایگزینی

## ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به بیان اهمیت جایگزینی اقلام در مدیریت موجودی‌ها و کنترل هزینه‌های کمبود اشاره شد. سپس یک مدل برای دو قلم کالای نسبتاً جایگزین با سیکل سفارش مشترک و امکان خرابی در انباشته‌های سفارش توسعه داده شد. طبق مفروضات مسئله کالای اول دچار کمبود نمی‌شود اما در هنگامی که کالای دوم با کمبود مواجه می‌شود، بخشی از تقاضای کالای ۲ با کالای ۱ جایگزین می‌شود و بخش دیگر از دست می‌رود. مدل‌سازی مسئله بر اساس جریان موجودی خالص دو قلم کالا ارائه شد و حل تحلیلی مدل برای حالات خاصی ارائه شد. در حالت کلی حل تحلیلی مدل منجر به پاسخ‌هایی شد که متغیرها در فرمول نهایی بر اساس یکدیگر بیان شده بودند. بنابراین نیاز به حل عددی برای یافتن جواب‌های دو معادله دو مجهول حاصل از مشتق تابع هدف بود. دو معادله دو مجهول مثال عددی توسعه‌یافته حل شده و جواب‌های به‌دست‌آمده در شرایط بهینگی مرتبه اول و دوم بررسی شدند. سپس اثر تغییر پارامترهای هزینه جایگزینی، هزینه نگهداری کالای دوم و درصد جایگزینی بر سطح سرویس کالای دوم و هزینه کل بررسی شد. بر اساس تحلیل حساسیت انجام‌شده، کاهش هزینه جایگزینی، افزایش درصد جایگزینی و یا افزایش هزینه نگهداری کالای دوم منجر به افزایش استفاده از فرصت جایگزینی در سیستم شد. افزایش هزینه جایگزینی و هزینه نگهداری کالای دوم منجر به افزایش هزینه کل سیستم شد اما در خصوص درصد جایگزینی رفتار هزینه کل یکنواخت نبود.

در این پژوهش مدل‌سازی برای یک سیستم دو کالایی صورت گرفته است. سیستم چند کالایی به دلیل تعداد حالات زیاد جایگزینی، می‌تواند دارای پیچیدگی خاص باشد. از مطالعات آتی می‌توان به مدل‌سازی مسئله در سیستم چند کالایی اشاره

- [21] S. S. Sana, "A production-inventory model of imperfect quality products in a three-layer supply chain", *Decis. Support Syst.*, vol. 50, no. 2, pp. 539-547, 2011, <https://doi.org/10.1016/j.dss.2010.11.012>.
- [22] S. Paul, M.I.M. Wahab, and P. Ongkunaruk, "Joint replenishment with imperfect items and price discount", *Comput. Ind. Eng.*, vol. 74, pp. 179-18, 2014, <https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.05.015>.
- [23] L. Moussawi-Haidar, M. Salameh, and W. Nasr, "Effect of deterioration on the instantaneous replenishment model with imperfect quality items", *Appl. Math. Model.*, vol. 38, no. 24, pp. 5956-596, 2014, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.05.003>.
- [24] J. Bhowmick, "Optimal inventory policies for imperfect inventory with price dependent stochastic demand and partially backlogged shortages", *Yugoslav Journal of Operations Research*, vol. 22, no. 2, pp. 199-223, 2012, <https://doi.org/10.2298/YJOR101011007B>
- [25] A. Mukhopadhyay, and A. Goswami, "An inventory model with shortages for imperfect items using substitution of two products", *Int. J. Oper. Res.*, vol. 30, no. 2, pp. 193-219, 2017, <https://doi.org/10.1504/IJOR.2017.086525>.
- practical approach", *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 77, no. 1, pp. 85-87, 2002, [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(01\)00203-1](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(01)00203-1).
- [16] J. Rezaei, "Economic order quantity model with backorder for imperfect quality items", *Proceedings. 2005 IEEE International Engineering Management Conference, 2005.*, St. John's, NL, Canada, 2005, pp. 466-470, DOI: 10.1109/IEMC.2005.1559191.
- [17] J. C. Yu, H. M. Wee, and J. M. Chen, "Optimal ordering policy for a deteriorating item with imperfect quality and partial backordering", *J. Chin. Inst. Chem. Eng.*, vol. 22, no. 6, pp. 509-520, 2005, <https://doi.org/10.29977/JCIE.200511.0007>.
- [18] S. Papachristos, and I. Konstantaras, "Economic ordering quantity models for items with imperfect quality", *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 100, no. 1, pp. 148-15, 2006, <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2004.11.004>.
- [19] B. Maddah, and M. Y. Jaber, "Economic order quantity for items with imperfect quality: revisited", *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 112, no. 2, pp. 808-815, 2008, <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2007.07.003>.
- [20] B. Maddah, M. K. Salameh, and L. Moussawi-Haidar, "Order overlapping: A practical approach for preventing shortages during screening", *Comput. Ind. Eng.*, vol. 58, no. 4, pp. 691-695, 2010, <https://doi.org/10.1016/j.cie.2010.01.014>.