Scientific Journal of Supply Chain Management
Vol. 26, No. 1, Spring 2024, Serial No. 82
ISSN: 2008-9198 , E-ISSN: 2717-1647

Joint Replenishment of Partially Substitutable Imperfect Items with Cost of Substitution

Hadiseh Sadat Noorbakhsh, Davood Mohammaditabar *

*Associate Professor, Faculty of Industrial Engineering, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

(Received: 19/11/2023, Revised: 30/12/2023, Accepted: 06/02/2024, Published: 20/05/2024)
DOR:

ABSTRACT

In inventory management, some items can be substituted for others. This means that in case of a shortage, some of the demand can be met by the substitute item, leading to reduced shortage costs. This paper examines two partially substitutable products with imperfect items in the order quantity. Imperfect items are removed after inspection. The two items have the same cycle time, and in the case of a shortage, part of the demand is substituted. The model is presented and solved symbolically for some special cases, and a numerical example is provided for the general case. The findings show that increasing substitution costs, decreasing holding costs of the substitutable item, and decreasing the percentage of substitution could reduce the time with a shortage. Moreover, increasing substitution and holding costs increases the total inventory costs, while the increase in the percentage of substitution could either increase or decrease the total inventory costs in different intervals.

Keywords: Joint Replenishment, Substitutable Items, Imperfect Items, Lost Sale

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.

Publisher: Imam Hussein University © Authors

* Corresponding Author Email: d_mohammaditabar@azad.ac.ir

نشریه علمی «مدیریت زنجیره تامین»
سال بیست و ششم، شماره ۸۲، بهار ۱۴۰۳؛ ص ۷۶-۶۷
شاپای چاپی: ۲۰۰۸-۹۱۹۸| شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۱۶۴۷

علمی – پژوهشی

مدل‌سازی مسئله سفارش هم‌زمان کالاها با قابلیت جایگزینی نسبی به‌همراه هزینه جایگزینی و امکان معیوب بودن بخشی از انباشته خرید

حدیثه سادات نوربخش[۱]، داود محمدی تبار[۲*]

۱- کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران ۲- دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

DOR:20.1001.1.20089198.1403.26.82.5.2

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۰/۰۹ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۲/۳۱

چکیده

در مدیریت کنترل موجودی، تقاضای برخی از اقلام قابلیت جایگزینی با اقلام دیگر را دارد. بدین ترتیب در دوره مواجهه با کمبود، می‌توان برای تأمین بخشی از تقاضا، از کالای جایگزین استفاده کرده و هزینه‌های مواجهه با کمبود را کاهش داد. در این مقاله دو کالای قابل جایگزین در نظر گرفته‌شده که بخشی از انباشته خرید آن‌ها معیوب بوده که پس از بازرسی اقلام معیوب، معدوم می‌شود. دو کالا دارای سیکل سفارش مشترک بوده و در هنگام مواجهه با کمبود بخشی از تقاضا با کالای دیگر جایگزین می‌شود و بخش دیگر نیز از دست می‌رود. مدل‌سازی مسئله به‌صورت تحلیلی انجام‌شده و برای برخی از حالات خاص مدل، فرمول تحلیلی متغیرهای تصمیم مدل بر اساس پارامترها به‌دست‌آمده است. الگوریتم حل مسئله در حالت کلی تشریح شده و سپس با ارائه یک مثال عددی تحلیل حساسیت مدل انجام شده است. بر اساس نتایج به‌دست‌آمده در صورت افزایش هزینه‌های جایگزینی یا کاهش هزینه‌های نگهداری و یا کاهش درصد جایگزینی، نسبتی از زمان که موجودی کالا دچار کمبود شده، کاهش می‌یابد. همچنین اگرچه کاهش هزینه جایگزینی منجر به کاهش هزینه کل سیستم می‌شود اما در خصوص درصد جایگزینی، با تغییر درصد جایگزینی در بازه‌های مختلف، هزینه کل می‌تواند افزایش یا کاهش یابد.

واژه‌های کلیدی: سفارش هم‌زمان، کالای جایگزین، کالای معیوب، فروش ازدست‌رفته

۱- مقدمه

کنترل موجودی یکی از اجزای مهم تصمیم‌گیری یک سازمان است که بر درآمد و هزینه های آن تأثیر زیادی دارد. یکی از تصمیمات مهم در کنترل موجودی نحوه مواجهه با کمبود و سطح سرویس سیستم است. در هنگام مواجهه با کمبود خسارت ها و همچنین هزینه فرصت‌های قابل‌توجهی به سیستم تحمیل می‌شود. از طرف دیگر درصورتی‌که برای اجتناب از کمبود سطح موجودی‌ها افزایش یابد، سیستم با هزینه های بالای نگهداری اقلام و هزینه های سرمایه مواجه می‌شود. بنابراین همواره مدل‌سازی موجودی‌ها با لحاظ کردن هزینه های فروش ازدست‌رفته، کمبود پس‌افت، نگهداری اقلام و هزینه‌های سفارش دهی انجام می‌شود تا ضمن بهینه‌سازی هزینه کل، سطح سرویس مطلوبی ارائه شود [۱]. یکی از شیوه‌های مواجهه با کمبود، ارائه اقلام جایگزین است. بدین ترتیب در مواقعی که مشتری با کمبود یک کالا مواجه می شود می تواند نیاز خود را از طریق یک کالای جایگزین تأمین کند.

در این شرایط درصد جایگزینی اقلام و هزینه های مربوط به تغییر سفارش مشتری نیز به پارامترهای سیستم افزوده شده و مدل سازی کنترل موجودی با لحاظ کردن هم‌زمان دو کالای قابل جایگزین انجام می‌شود. کالاهای قابل جایگزین، کالاهایی هستند که ویژگی های مشابه یا کاملاً یکسان برای تأمین نیاز مشتری دارند. به‌عنوان‌مثال مشتری که برای خرید نوشابه به یک فروشگاه مراجعه می‌کند در صورت عدم موجودی نوشابه ممکن است دوغ را جایگزین آن کند چون هردوی این کالاها نیاز به نوشیدنی مشتری را مرتفع می‌کنند. مثال‌های متعددی در این خصوص می‌توان مطرح کرد که میزان جایگزینی دو کالا کمتر یا بیشتر باشد و یا مشتری مصرف‌کننده نهایی یا کسب‌وکار باشد. به‌عنوان نمونه می‌توان به مقاله درانزر و همکاران [۲] رجوع کرد که مثال‌هایی از استفاده از کمپرسورهای مختلف در تولید یخچال، و فروش کالای جایگزین در سوپرمارکت‌ها بیان‌شده است. هر چه دو کالا ویژگی‌های مشترک بیشتری داشته باشند درصد بیشتری از مشتری ها از امکان جایگزینی هرکدام در صورت کمبود دیگری استفاده می‌کنند. درصورتی‌که همه

* رایانامه نویسنده مسئول: d_mohammaditabar@azad.ac.ir

تقاضای کالایی که دچار کمبود شده است با کالای دیگر جایگزین شود، به آن دو کالا کاملاً جایگزین گفته می‌شود. اما درصورتی‌که تنها بخشی از تقاضای دچار کمبود شده کالای دیگر را جایگزین کند به آن دو کالا نسبتاً جایگزین گفته می‌شود.

تحقیقات متعددی در زمینه اقلام قابل جایگزین انجام شده است. درانزر و همکاران [۲] از اولین تحقیقاتی است که به مدل‌سازی مسئله سفارش هم‌زمان دو کالای قابل جایگزین با مفروضات مدل سفارش اقتصادی پرداخته است. گورانی و درانزر[۳] بیش از دو کالای قابل جایگزین در نظر گرفتند و مسئله را پیچیده‌تر کردند. آن‌ها یک رویه حل استاندارد برای مسئله در نظر گرفتند که در زمان کمی، زمان سفارش و تعداد جایگزینی اقلام (کالاها) را به دست می آورد که با جواب بهینه اختلاف کمی داشت. کانگ و همکاران [۴] مسئله سفارش هم زمان کالاها را همراه با جایگزینی و تخفیف مقداری در نظر گرفتند و یک رویه حل ابتکاری برای مسئله معرفی کردند. طالعی زاده و همکاران [۵] مسئله سفارش دهی هم‌زمان چند کالا همراه با جایگزینی در یک زنجیره تأمین دوسطحی شامل یک فروشنده و چندین خرده فروش را همراه با اثر خرابی در کالای نهایی و جریان مواد در نظر گرفتند. آن ها مدلی را برای مسئله معرفی کردند که قیمت خرده‌فروش، فرکانس سفارش هم‌زمان کالاها، چرخه سفارش هم‌زمان و نرخ تولید را به‌صورت هم‌زمان در نظر می‌گرفت. آن‌ها برای حل مسئله رویکرد استکلبرگ، جایی که فروشنده به‌عنوان رهبر زنجیره و خرده‌فروشان به‌عنوان زیرمجموعه هستند را در نظر گرفتند. سید حسینی و همکاران [۶] مدل سفارش هم‌زمان چند کالا با جایگزینی را در نظر گرفتند و از رویکرد شبیه‌سازی برای حل مسئله استفاده کردند. در مسئله آن‌ها دو کالای قابل جایگزین وجود داشت. در مسئله آن‌ها تقاضا احتمالی بوده و از مدل‌های صف برای سیستم موجودی خود استفاده کردند. بورنتس و کاناوتس[۷] مسئله سفارش هم‌زمان چند کالا را با جایگزینی و محدودیت کمبود با زمان سفارش دهی هم‌زمان در نظر گرفتند و در دو حالت قطعی و غیرقطعی از مدل‌های زنجیره زمانی مارکوف برای تعیین سطح موجودی استفاده کردند. مداح و همکاران [۸] مسئله مقدار سفارش اقتصادی را همراه با چند کالای قابل جایگزین در نظر گرفتند که مدل بهینه سازی مقدار سفارش اقتصادی هر کالا تحت اثرات جایگزینی با هدف کمینه کردن هزینه های راه‌اندازی و نگهداری و کمبود را معرفی کردند. آن‌ها یک مدل‌سازی ریاضی غیرخطی برای مسئله معرفی کرده و محدب بودن مدل را بررسی کردند و آنالیز حساسیت بر روی پارامترهای متفاوت هزینه برای بررسی تأثیر ان بر سیاست سفارش دهی را بررسی کرده و نشان دادند که جایگزینی راهی مؤثر برای کاهش هزینه‌های سفارش دهی و نگهداری و حمل‌ونقل و کمبود است. پاسترناک و درانزر [۹] مسئله سفارش دهی هم‌زمان چند کالا با قابلیت جایگزینی با تقاضای غیرقطعی را در نظر گرفتند. جایگزینی در مسئله آن‌ها باعث می‌شد که درآمد کالاها تغییر کند. آن ها مسئله جایگزینی یک کالا را با حالتی که جایگزینی وجود ندارد مقایسه کردند و نشان دادند که مقدار سفارش و درآمد آن ها می تواند کاهش یا افزایش پیدا کند. گیری و همکاران [۱۰] حالتی را در نظر گرفتند که تقاضای دو کالای قابل جایگزین در هنگامی‌که هردو کالا موجودی خالص مثبت دارند به قیمت یکدیگر وابسته است و در هنگام مواجهه با کمبود بخشی از تقاضا با کالای جایگزین تأمین می‌شود. آن‌ها نتیجه‌گیری کردند که اختلاف میان پارامتر میزان حساسیت تقاضا به قیمت در دو کالا نقش تعیین‌کننده‌ای در اندازه انباشته سفارش اقلام دارد. مختاری [۱۱] به ارائه مدلی پرداخت که دو کالای مکمل و یک کالای جایگزین وجود دارد و نتیجه‌گیری کردند که بررسی هم‌زمان آن‌ها منجر به کاهش هزینه‌ها نسبت به مدل ساده سفارش اقتصادی شده است. راجش و وینود میشرا [۱۲] فرض فسادپذیری را به دو کالای مکمل و یک کالای جایگزین اضافه کردند. توینتر و کوپرز [۱۳] به بررسی دو کالای قابل جایگزین در شرایطی پرداختند که الزامی به سیکل سفارش مشترک برای دو کالا وجود نداشت. آن‌ها حالت‌های مختلفی که هیچ جایگزینی انجام نشود، بخشی از تقاضا جایگزین شود و یا کل تقاضا جایگزین شود را باهم مقایسه کردند.

نکته دیگری که در خصوص کالاهای قابل جایگزین وجود دارد مسئله معیوب بودن کالاهاست. در تولید کالاهای مختلف به دلیل اشکال در مواد اولیه و یا فرایند تولید ممکن است کالای معیوب تولید شود. همچنین در هنگام حمل کالا از تأمین‌کننده به خرده فروش ممکن است برخی از کالاهای سالم نیز به دلیل اشکال در جابجایی دچار عیب شوند. بنابراین پس از دریافت کالاها بازرسی صورت می‌گیرد و اقلام معیوب شناسایی می‌شوند. اقلام معیوب شناسایی‌شده ممکن است معدوم شود، در بازار ثانویه به فروش برسد و یا برای تعمیر به فرایند تولید بازگردند. به‌عنوان‌مثال وقتی پاکت‌های بسته‌بندی استریلیزه دوغ یا شیر دچار پارگی باشد به دلیل فسادپذیری آن‌ها، اقلام معیوب قابلیت مصرف ندارند و دور ریخته می‌شوند. مقالات مختلفی مسئله سفارش دهی هم‌زمان کالاها همراه با خرابی را در سیستم مقدار سفارش اقتصادی در نظر گرفته‌اند.

سلامه و جابر[۱۴] مدلی ریاضی را توسعه دادند که هر سفارش از درصدی از قطعات معیوب تشکیل شده است و قطعات خراب با قیمت کمتری پس از بازرسی فروخته می‌شدند. گویال و همکاران [۱۵] روش حل ساده ای را برای مسئله معرفی کردند و آن را با جواب بهینه مقایسه کردند. نتایج نشان می‌دادند که روش آن‌ها جواب‌هایی با انحراف کم از جواب بهینه را به دست می‌آورد. رضایی [۱۶] کمبود را در مسئله در نظر گرفتند و فرض کردند که کمبود درنتیجه برگشت از فروش قطعات معیوب در ابتدای چرخه اتفاق

می افتد. یو و همکاران[۱۷] کمبود و خرابی در چرخه تولید را در نظر گفتند و آن را در قطعات برگشت از فروش محاسبه کردند. آن ها یک حد پایین برای فروش ازدست رفته و برگشت از فروش در مسئله در نظر گرفته و الگوریتم ابتکاری و آنالیز عددی را برای حل مسئله پیشنهاد کردند. پاپاچریستوس و کونتاراس[۱۸] فرض کردند که قطعات معیوب در انتهای بازرسی به فروش می رود. بنابراین در مسئله آن‌ها یک هزینه نگهداری تا پایان زمان بازرسی برای قطعات معیوب وجود دارد. مداح و جابر [۱۹] قطعات معیوب را در چرخه در نظر گرفته و فرض کردند که هزینه نگهداری و حمل ونقل برای این قطعات در طول چرخه اتفاق می‌افتد

مداح و همکاران [۲۰] برای دوری از کمبود فرض کردند که سفارش دهی زمانی که سطح موجودی فقط به اندازه تقاضای زمان بازرسی است انجام شود. آن‌ها یک زنجیره غیرقطعی را در نظر گرفتند و مقدار تقاضا در زمان بازرسی را از دوره های قبل محاسبه کردند. سان [۲۱] یک زنجیره تأمین سه سطحی برای تعیین قطعات معیوب از تأمین‌کننده و فروشنده هنگامی‌که نرخ تقاضای فروشنده ثابت نیست را در نظر گرفت. او فرض کرد که در همه قسمت‌های زنجیره تأمین مقدار اندازه سفارش به‌صورت نامساوی به علت خرابی به قسمت‌های بعدی منتقل می‌شود. پاول و همکاران[۲۲] مسئله اثر درصد اقلام معیوب و خرابی بر روی سیاست سفارش دهی را بررسی کردند. آن ها دو سناریو برای مسئله در نظر گرفتند. سناریو با تخفیف قیمت فروش و سناریو بدون تخفیف قیمت فروش. برای هر سناریو الگوریتمی برای مشخص کردن طول چرخه گروه اقلام و تعداد صحیح فواصل زمانی که سفارش مجدد در آن اتفاق می افتد را معرفی کردند. حیدری و همکاران [۲۳] مسئله سفارش هم‌زمان کالاها را همراه با خرابی در نظر گرفتند . در مسئله آن‌ها سفارش‌ها دارای یک تابع توزیع تصادفی از خرابی بودند و تعدادی از کالاها به علت خرابی از بین می‌رفتند. هنگام دریافت یک سفارش توسط خرده‌فروش، عمل بازرسی برای تشخیص قطعات معیوب انجام می‌شود. آن ها یک مدل ریاضی برای مسئله توسعه دادند که کمبود در آن مجاز نبوده و برای این امر هنگامی که سطح موجودی به اندازه تقاضای موجود در زمان بازرسی است، سفارش مجدد داده می‌شود. سپس کمبود را در نظر گرفته و یک مدلی را برای ترکیب کالای برگشت از فروش توسعه دادند. بومیک [۲۴] مدل موجودی همراه با خرابی تک دوره‌ای با تقاضای احتمالی وابسته به قیمت و اندازه انباشته جزئی همراه با کمبود را در نظر گرفت. در مسئله او برگشت از فروش یک تابع غیرخطی غیر افزایشی از اندازه کمبود است. او دو حالت برای قطعات معیوب خود در نظر گرفت. حالت اول خرابی یک تابع توزیع نمایی است و در حالت دوم یک تابع توزیع یکنواخت است.

مسئله کمبود یک امر مهم در مسائل دنیای واقعی است. کمبود باعث عدم تأمین تقاضای مشتری شده و نارضایتی آن را در پی دارد و می تواند باعث کاهش مشتری های بالفعل و بالقوه سیستم شود. همچنین کمبود باعث کاهش سود می شود. لذا باید مکانیسم هایی برای کاهش کمبود و هزینه های آن در مسئله وجود داشته باشد. درنتیجه در نظر گرفتن کمبود و کاهش هزینه‌های آن، یک امر مهم و حیاتی در دنیای واقعی برای سازمان ها است تا بتوانند سود خود را افزایش داده و علاوه بر آن از نارضایتی مشتری ها و کاهش آن ها جلوگیری کند. با توجه به مطالعه ادبیات، استفاده از جایگزینی کالاها و لحاظ کردن کالاهای معیوب در فرایند تصمیم‌گیری از مکانیسم‌هایی است که می‌تواند هزینه‌های مرتبط با موجودی و کمبود کالا را مدیریت کند.

با توجه به مطالعات فوق قابل مشاهده است که مسئله سفارش هم‌زمان اقتصادی کالاهای نسبتاً جایگزین به همراه خرابی و کمبود به‌صورت هم‌زمان کمتر در نظر گرفته‌شده است. سفارش هم‌زمان چند کالا باعث کاهش هزینه های سفارش دهی و نگهداری و حمل‌ونقل می‌شود. همچنین جایگزینی کالاها نیز می‌تواند باعث کاهش هزینه‌های کمبود و نگهداری موجودی شود. به این صورت که علاوه بر کاهش فروش ازدست‌رفته، باعث کاهش متوسط موجودی می‌شود و درنتیجه آن هزینه نگهداری را کاهش می‌دهد. ضمن اینکه باعث می شود در صورت اتمام موجودی یک کالا، دیگر نیازی به سفارش مجدد به‌صورت خاص برای آن کالا نبوده و هزینه‌های ثابت سفارش را کاهش داده، و با جایگزینی تقاضا از نارضایتی مشتری جلوگیری می‌شود. از طرف دیگر درصورتی‌که کالاهای معیوب در تصمیم‌گیری در نظر گرفته نشود، می‌تواند سیستم را دچار کمبود و متحمل هزینه‌های حاصل از کمبود کند.

اگرچه در هنگامی‌که یک کالا دچار کمبود شده و یا به علت‌های متفاوتی مانند خرابی در دسترس نیست، می‌توان برای برآورده کردن تقاضا، از کالای جایگزین استفاده کرد اما در بعضی مواقع برای جایگزینی اقلام هزینه و یا ضرری برای فروشنده وجود دارد. به‌عنوان‌مثال یک تولیدکننده یخچال را در نظر بگیرید که از دو نوع کمپرسور با درجه کیفیت بالا و متوسط برای تولید دو یخچال لوکس و متوسط استفاده می‌کند. در صورت عدم موجودی کمپرسورهای با کیفیت متوسط، تولیدکننده می‌تواند کمپرسورهای با کیفیت بالا را در تولید یخچال با کیفیت متوسط جایگزین کند. در این صورت اختلاف قیمت کمپرسورهای با کیفیت بالا و متوسط هزینه جایگزینی است. بنابراین هزینه جایگزینی در تصمیم‌گیری در خصوص کالاهای قابل جایگزین باید لحاظ شود.

در جدول (۱) برخی از مهم‌ترین مقالاتی که در حوزه کالاهای قابل جایگزین مطالعه کرده‌اند ازلحاظ نوع جایگزینی کامل یا نسبی، تشابه یا تفاوت پارامترهای کالاها، در نظر گرفتن امکان معیوب بودن کالاها، و همچنین هزینه‌های جایگزینی و فروش ازدست‌رفته مقایسه شده‌اند.

جدول (۱): مقایسه مقالات مختلف در حوزه کالاهای قابل جایگزین

مرجع	جایگزینی نسبی	پارامترهای متفاوت اقلام	کالای معیوب	هزینه جایگزینی	فروش ازدست‌رفته
[۸]	✓	✓	×	✓	✓
[۱۱]	×	✓	×	×	×
[۱۲]	✓	✓	×	✓	✓
[۱۳]	×	×	×	✓	×
[۱۴]	✓	✓	×	×	✓
[۲۵]	×	×	✓	✓	×
این پژوهش	✓	✓	✓	✓	✓

همان‌طور که در جدول (۱) نیز مشخص است، در این پژوهش به مدل‌سازی مسئله سفارش هم‌زمان اقلام نسبتاً جایگزین با در نظر گرفتن خرابی و فروش ازدست‌رفته پرداخته‌شده است. هنگامی‌که موجودی کالا به صفر می‌رسد بخشی از تقاضای کالا از کالای جایگزین تأمین می‌شود. فروش ازدست‌رفته به این شکل است که درصدی از تقاضا بعد از اتمام موجودی از طریق جایگزینی برآورده می‌شود و درصدی از آن فروش ازدست‌رفته می‌شود. همچنین خرابی به این صورت است که پس از بازرسی، اقلام به دو دسته کالاهای معیوب و سالم تقسیم می‌شود و کالاهای معیوب پس از اتمام زمان بازرسی معدوم می‌شود. همچنین در این پژوهش هزینه جایگزینی نیز لحاظ شده است

در ادامه و در بخش ۲ مدل‌سازی مسئله ارائه می‌شود. سپس حالت‌های خاص و حل تحلیلی مدل در بخش ۳ بیان می‌شود. بخش ۴ به ارائه مثال عددی و تحلیل حساسیت مدل می‌پردازد. درنهایت در بخش ۵ نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲- مدل‌سازی

دو کالا را لحاظ کنید که هم‌زمان سفارش داده می‌شوند و نسبتاً جایگزین یکدیگر هستند. کالای اول کالای اصلی بوده و دچار کمبود نمی‌شود اما کالای دوم درصورتی‌که دچار کمبود شود می‌تواند بخشی از تقاضای خود را از کالای اول تأمین کند.

مفروضات مدل به شرح زیر است:

۱) پارامترهای مدل قطعی و ثابت است.

۲) هزینه جایگزینی لحاظ شده است.

۳) درصد اقلام معیوب در هر انباشته ثابت در نظر گرفته‌شده است.

۴) بخشی از کمبود با جایگزینی جبران و بخشی از آن فروش ازدست‌رفته می‌شود.

۵) اقلام معیوب بعد از اتمام بازرسی معدوم می‌شود.

در مدل‌سازی این مسئله طول دوره بهینه سیکل سفارش و زمان جایگزینی حائز اهمیت است. با در نظر گرفتن این موارد پارامترها و متغیرها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

پارامترها:

D_1 تقاضای کالای ۱

D_2 تقاضای کالای ۲

γ درصد جایگزینی از کالای ۲ به ۱

h_1 هزینه نگهداری هر واحد کالای ۱

h_2 هزینه نگهداری هر واحد کالای ۲

A_1 هزینه ثابت سفارش در هر بار سفارش کالای ۱

A_2 هزینه ثابت سفارش در هر بار سفارش کالای ۲

π' هزینه جایگزینی

π هزینه فروش ازدست‌رفته

p_1 کسری از کالای ۱که معیوب است

p_2 کسری از کالای ۲ که معیوب است

x_1 نرخ بازرسی کالای ۱

x_2 نرخ بازرسی کالای ۲

متغیرها:

T_1 سیکل سفارش کالای ۱

T_2 سیکل سفارش کالای ۲

Q_1 اندازه انباشته کالای ۱

Q_2 اندازه انباشته کالای ۲

$IL_{1j}(t)$ موجودی خالص کالای ۱ در لحظه t در بازه j

$IL_{2j}(t)$ موجودی خالص کالای ۲ در لحظه t در بازه j

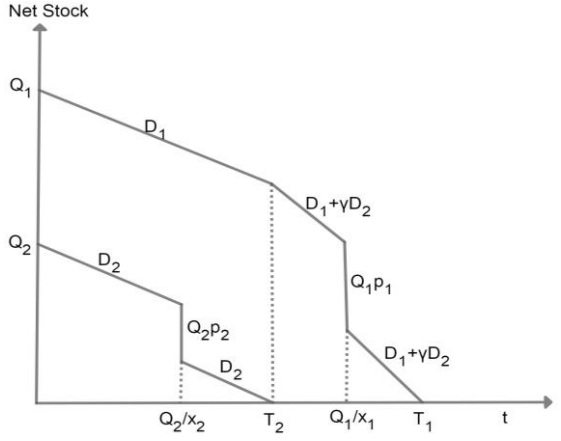
$\overline{I_1}$ متوسط موجودی کالای ۱ در واحد زمان

$\overline{I_2}$ متوسط موجودی کالای ۲ در واحد زمان

b_L مقدار تقاضای کالای ۲ در هر سیکل که ازدست‌رفته است

b_S مقدار تقاضای کالای ۲ در هر سیکل که با کالای ۱ جایگزین شده است

جریان موجودی اقلام در شکل (۱) نشان داده‌شده است.



شکل (۱): جریان موجودی کالای ۱ و ۲

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده‌شده، بعد از اتمام موجودی کالای ۲ در زمان T_2، بخشی از تقاضای آن با کالای ۱ جایگزین شده است و بنابراین نرخ مصرف کالای ۱ افزایش‌یافته است. در ادامه، بازرسی کالای ۱ نیز به اتمام رسیده و نهایتاً در انتهای سیکل، موجودی کالای ۱ نیز به صفر می‌رسد.

در یک حالت دیگر، درصورتی‌که نرخ بازرسی کالای ۱ (x_1) به اندازه کافی زیاد باشد ممکن است که زمان اتمام بازرسی کالای ۱ ($\frac{Q_1}{x_1}$) قبل از اتمام موجودی کالای ۲ حادث شود ($\frac{Q_1}{x_1} < T_2$). بنابراین تعویض کالای ۲ با کالای ۱ بعد از زمان بازرسی کالای ۱ انجام شود. توجه کنید که میزان اقلام سالم از کالای ۱ در هر دو حالت یکسان است بنابراین درزمانی که کالای ۲ با کمبود مواجه می‌شود تعویض آن با کالای ۱ سالم انجام خواهد شد. لذا در عمل تفاوتی در سیاست بهینه دو حالت رخ نمی‌دهد. این موضوع در مقاله مخوپادوای [۲۵] نیز بیان‌شده است. بنابراین در مدل‌سازی مسئله تنها همان حالت اول بیان می‌شود که در شکل (۱) نشان داده‌شده است. معادله دیفرانسیل کالاهای ۱ و ۲ در بازه‌های مختلف در جدول(۲) نشان داده‌شده است:

جدول (۲): معادلات دیفرانسیل و شروط اولیه موجودی خالص کالای ۱ و ۲ در بازه‌های مختلف

	شروط اولیه	بازه زمانی	معادله دیفرانسیل
(۱)	$IL_{11}(0) = Q_1$	$0 \le t \le T_2$	$\frac{\mathrm{d}IL_{11}(t)}{\mathrm{dt}} = -D_1$
(۲)	$IL_{12}(T_2) = IL_{11}(T_2)$	$T_2 \le t \le \frac{Q_1}{x_1}$	$\frac{\mathrm{d}IL_{12}(t)}{\mathrm{dt}} = -D_1 - \gamma D_2$
(۳)	$IL_{13}\left(\frac{Q_1}{x_1}\right) = IL_{12}\left(\frac{Q_1}{x_1}\right)$ $IL_{13}(T_1) = 0$	$\frac{Q_1}{x_1} \le t \le T_1$	$\frac{\mathrm{d}IL_{13}(t)}{\mathrm{dt}} = -D_1 - \gamma D_2$
(۴)	$IL_{21}(0) = Q_2$	$0 \le t \le \frac{Q_2}{x_2}$	$\frac{\mathrm{d}IL_{21}(t)}{\mathrm{dt}} = -D_2$
(۵)	$IL_{22}\left(\frac{Q_2}{x_2}\right) = IL_{21}\left(\frac{Q_2}{x_2}\right)$ $IL_{22}(T_2) = 0$	$\frac{Q_2}{x_2} \le t \le T_2$	$\frac{\mathrm{d}IL_{22}(t)}{\mathrm{dt}} = -D_2$

با حل معادلات دیفرانسیل و اعمال شروط اولیه روابط زیر به دست می‌آید:

$$Q_1 = \frac{D_1T_1 + \gamma D_2T_1 - \gamma D_2T_2}{1-p_1} \quad (۶)$$

$$\mathrm{Q}_2 = \frac{D_2T_2}{1-p_2} \quad (۷)$$

$$IL_{11}(t) = \frac{D_1T_1 + \gamma D_2T_1 - \gamma D_2T_2}{1-p_1} - D_1t_1 \quad 0 \le t \le T_2 \quad (۸)$$

$$IL_{12}(t) = \frac{D_1T_1 + \gamma D_2T_1 - \gamma D_2T_2}{1-p_1} + \gamma D_2T_2 - \gamma D_2t - D_1t \quad T_2 \le t \le \frac{Q_1}{x_1} \quad (۹)$$

$$IL_{13}(t) = (D_1 + \gamma D_2)(T_1 - t) \quad \frac{Q_1}{x_1} \le t \le T_1 \quad (۱۰)$$

$$IL_{21}(t) = \frac{D_2T_2}{1-p_2} - D_2t \quad 0 \le t \le \frac{Q_2}{x_2} \quad (۱۱)$$

$$IL_{22}(t) = D_2(T_2 - t) \quad \frac{Q_2}{x_2} \le t \le T_2 \quad (۱۲)$$

در ادامه متوسط موجودی کالای ۱ و ۲، میزان فروش ازدست‌رفته و میزان کالای جایگزین شده محاسبه می‌شوند که به ترتیب بر اساس روابط (۱۳) تا (۱۶) بیان‌شده‌اند.

$$\begin{aligned}\overline{I_1} = \left(\frac{1}{T_1}\right)\Bigg[&\int_0^{T_2} IL_{11}(t)dt + \int_{T_2}^{\frac{Q_1}{x_1}} IL_{12}(t)dt \\ &+ \int_{\frac{Q_1}{x_1}}^{T_1} IL_{13}(t)dt\Bigg] \\ &= \frac{(D_1 + \gamma \mathrm{D}_2)T_1}{2} \\ &+ \frac{p_1[D_1T + \gamma D_2(T_1 - T_2)]^2}{x_1T_1(1-p_1)^2} \\ &- \frac{\gamma D_2T_2^2}{2T_1}\end{aligned} \quad (۱۳)$$

$$\begin{aligned}\overline{I_2} = \left(\frac{1}{T_1}\right)\left[\int_0^{\frac{Q_2}{x_2}} IL_{21}(t)dt + \int_{\frac{Q_2}{x_2}}^{T_2} IL_{22}(t)dt\right] \\ = \frac{D_2T_2^2}{2T_1} + \frac{(D_2T_2)^2p_2}{[1-p_2]^2\mathrm{T}_1x_2}\end{aligned} \quad (۱۴)$$

$$b_L = D_2(1-\gamma)(T_1 - T_2) \quad (۱۵)$$

$$b_S = D_2\gamma(T_1 - T_2) \quad (۱۶)$$

برای اینکه بازرسی کالا قبل از انتهای سیکل به پایان برسد همان‌طور که در [۲۵] اشاره‌شده است باید رابطه (۱۷) میان پارامترها برقرار باشد که به‌عنوان پیش‌فرض لحاظ می‌شود.

$$p_i \le 1 - \frac{D_i}{x_i} \quad \forall x_i \epsilon \{1,2\} \quad (۱۷)$$

تابع هدف و محدودیت‌ها به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}Min\ TC &= h_1\overline{I_1} + h_2\overline{I_2} \\ &+ \frac{A_1 + A_2 + \pi b_L + \pi' b_S}{T_1}\end{aligned} \quad (۱۸)$$

s.t.

$$T_2 \le T_1 \quad (۱۹)$$

$$T_1, T_2 \ge 0 \quad (۲۰)$$

۳- حل تحلیلی و حالت‌های خاص

ابتدا مسئله در حالت‌های خاص به‌صورت تحلیلی حل‌شده و سپس الگوریتم حل مسئله در حالت کلی بیان می‌شود.

حالت اول) اگر درصد اقلام معیوب برابر صفر باشد

با قرار دادن صفر به‌جای پارامترهای p_1 و p_2 در تابع هزینه کل رابطه (۲۱) به دست می‌آید.

$$TC = h_1\left(\frac{(D_1+\gamma D_2)T_1}{2} - \frac{\gamma D_2 T_2^2}{2T_1}\right) + h_2\frac{D_2T_2^2}{2T_1} + \frac{A_1+A_2+\pi D_2(1-\gamma)(T_1-T_2)+\pi' D_2\gamma(T_1-T_2)}{T_1} \quad (۲۱)$$

با مشتق‌گیری از هزینه کل نسبت به T_2 و حل آن خواهیم داشت:

$$T_2 = \frac{\pi(1-\gamma)+\pi'\gamma}{h_2-h_1\gamma} \quad (۲۲)$$

برای اینکه T_2 مقدار مثبتی داشته باشد باید رابطه (۲۳) برقرار باشد

$$h_2 - h_1\gamma \geq 0 \quad (۲۳)$$

مشتق دوم تابع هزینه کل نسبت به T_2 بر اساس رابطه (۲۴) به دست می‌آید که همواره مثبت است. بنابراین تابع برحسب T_2 محدب است و با توجه به اینکه مقدار T_2 بر اساس پارامترهای مدل به دست آمد می‌توان آن را در تابع هزینه کل جایگزین کرده و نسبت به T_1 مشتق‌گیری کرد.

$$\frac{D_2(h_2-h_1\gamma)}{T_1} \geq 0 \quad (۲۴)$$

با جایگذاری T_2 در تابع هزینه کل و سپس با حل مشتق تابع مقدار T_1 بر اساس رابطه (۲۵) به دست می‌آید.

$$T_1 = \sqrt{\frac{U}{h_1(D_1+\gamma D_2)(h_2-h_1\gamma)}} \quad (۲۵)$$

که در این رابطه مقدار U بر اساس رابطه (۲۶) محاسبه می‌شود که باید مقداری مثبت داشته باشد. اگر U منفی باشد یعنی مشتق تابع هزینه کل ریشه ندارد و جواب بهینه در مرزهای تابع که در اینجا T_1=0 است خواهد بود که به معنی آن است که همه تقاضا باید دچار کمبود شود و داشتن سیستم موجودی هزینه بیشتری نسبت به هزینه‌های فرصت خواهد داشت.

$$\begin{aligned} U = {} & -2A_1\gamma h_1 + 2A_1h_2 - 2A_2\gamma h_1 + 2A_2h_2 \\ & - D_2(\gamma\pi')^2 + 2D_2\gamma^2\pi'\pi \\ & - D_2(\gamma\pi)^2 - 2D_2\gamma\pi'\pi \\ & + 2D_2\gamma\pi^2 - D_2\pi^2 \end{aligned} \quad (۲۶)$$

مشتق دوم تابع نسبت به T_1 بر اساس رابطه (۲۷) به دست می‌آید که همواره مثبت است.

$$\frac{\delta^2 TC}{\delta T_1^2} = \frac{U}{T_1^3(h_2-h_1\gamma)} \quad (۲۷)$$

بنابراین باید پس از محاسبه مقادیر T_1 و T_2 آن‌ها را باهم مقایسه کرد. اگر T_2<T_1 بود یعنی مقادیر محاسبه‌شده جواب بهینه تابع هستند. در غیر این صورت یعنی محدودیت مسئله بهینه‌سازی کارکردی است و بنابراین باید مقدار T_2 و T_1 را برابر فرض کرده و مسئله مجدد حل شود. برای این موضوع حالت خاص دوم می‌تواند مفید باشد.

حالت دوم) کمبود کالا مجاز نباشد

در این حالت عملاً جایگزینی اتفاق نمی‌افتد و T_1=T_2 خواهد بود که با جایگذاری آن در تابع هزینه کل خواهیم داشت:

$$TC = \frac{A_1+A_2}{T_1} + \left(\frac{D_1h_1+D_2h_2}{2} + \frac{{D_1}^2h_1p_1}{x_1(1-p_1)^2} + \frac{{D_2}^2h_2p_2}{x_2(1-p_2)^2}\right)T_1 \quad (۲۸)$$

مقدار بهینه T_1 از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$T_1 = \sqrt{\frac{A_1+A_2}{\frac{D_1h_1+D_2h_2}{2} + \frac{{D_1}^2h_1p_1}{x_1(1-p_1)^2} + \frac{{D_2}^2h_2p_2}{x_2(1-p_2)^2}}} \quad (۲۹)$$

مشتق دوم تابع نسبت به T_1 طبق رابطه (۳۰) به دست می‌آید که همواره مثبت است. بنابراین مقادیر محاسبه‌شده مینیم کلی تابع خواهند بود.

$$\frac{\delta^2 TC}{\delta T_1^2} = \frac{2(A_1+A_2)}{T_1^3} \quad (۳۰)$$

برای حل تحلیلی مدل در حالت کلی نیاز است که مشتقات تابع هزینه کل نسبت متغیرها محاسبه‌شده و برابر صفر قرار داده شود و سپس معین مثبت بودن هشین تابع در نقطه اکسترمم به‌دست‌آمده بررسی شود. در ادامه جواب‌های به‌دست‌آمده در محدودیت مسئله بررسی می‌شوند. اگر جواب‌های به‌دست‌آمده در محدودیت صدق نکرد، محدودیت کارکردی شده و مدل مجدداً در حالت خاص حل می‌شود. در حل معادلات به‌دست‌آمده از مشتق‌گیری تابع نسبت به T_1 و T_2 پاسخ پارامتری مستقل به دست نیامد. به‌عبارت‌دیگر مقدار بهینه T_1 برحسب T_2 و همچنین مقدار بهینه T_2 برحسب T_1 به دست می‌آید. مقدار T_2 از رابطه (۳۱) به دست می‌آید که در آن مقادیر V و W از روابط (۳۲) و (۳۳) به دست می‌آیند.

$$T_2 = \frac{V}{W} \quad (۳۱)$$

$$\begin{aligned} V = {} & x_2(1-p_2)^2[2D_1T_1\gamma h_1p_1 + 2D_2T_1\gamma^2h_1p_1 \\ & + \gamma{p_1}^2\pi' x_1 - \gamma{p_1}^2\pi x_1 \\ & - 2\gamma p_1\pi' x_1 + 2\,\gamma p_1\pi x_1 \\ & + \gamma\pi' x_1 - \gamma\pi x_1 + p_1^2\pi x_1 \\ & - 2p_1\pi x_1 + \pi x_1] \end{aligned} \quad (۳۲)$$

$$W = 2D_2\gamma^2h_1p_1p_2^2x_2 - 4D_2\gamma^2h_1p_1p_2x_2 + 2D_2\gamma^2h_1p_1x_2 + 2D_2h_2p_1^2p_2x_1 - 4D_2h_2p_1p_2x_1 + 2D_2h_2p_2x_1 - \gamma h_1p_1^2p_2^2x_1x_2 + 2\gamma h_1p_1^2p_2x_1x_2 - \gamma h_1p_1^2x_1x_2 + 2\gamma h_1p_1p_2^2x_1x_2 - 4\gamma h_1p_1p_2x_1x_2 + 2\gamma h_1p_1x_1x_2 - \gamma h_1p_2^2x_1x_2 + 2\gamma h_1p_2x_1x_2 - \gamma h_1x_1x_2 + h_2p_1^2p_2^2x_1x_2 - 2h_2p_1^2p_2x_1x_2 + h_2p_1^2x_1x_2 - 2h_2p_1p_2^2x_1x_2 + 4h_2p_1p_2x_1x_2 - 2h_2p_1x_1x_2 + h_2p_2^2x_1x_2 - 2h_2p_2x_1x_2 + h_2x_1x_2 \quad (۳۳)$$

با توجه به اینکه پس از مشتق‌گیری مدل در حالت کلی نسبت به متغیرها، فرمول به‌دست‌آمده برای متغیرها مستقل از متغیرهای دیگر به دست نیامده است، باید از یک نرم‌افزار برای حل دو معادله دو مجهول به‌دست‌آمده استفاده کرد. در ضمن، ازآنجاکه تابع هزینه کل تنها از دو متغیر تشکیل‌شده است و تنها یک محدودیت در مدل وجود دارد، بسیاری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی توانایی یافتن جواب بهینه تابع هزینه کل را دارند. به هر صورت فرمول تحلیلی برای مقدار بهینه متغیرها که تنها بر اساس پارامترها بیان شود در حالت‌های خاص مدل یافت شد.

۴- مثال عددی و تحلیل حساسیت

در این قسمت یک مثال عددی در نظر گرفته‌شده و تحلیل حساسیت آن انجام‌شده است. داده‌های مسئله در جدول (۳) داده شده است.

جدول (۳). مقادیر پارامترهای مثال عددی

A_1	۱۰۰	x_1	۱۶۰۰۰	γ	۰/۶
A_2	۱۰۰	x_2	۱۶۰۰۰	π	۳
D_1	۲۰۰	h_1	۱/۵	π'	۱/۸۴
D_2	۵۰	h_2	۵		
p_1	۰/۰۶	p_2	۰/۰۶		

برای حل بهینه تابع هزینه کل در حالت کلی باید دو معادله دو مجهول حاصل از مشتقات جزئی تابع هدف حل شود. با قرار دادن مقادیر عددی پارامترها در تابع هدف، و حل معادلات حاصل از مشتق‌گیری تابع هدف نسبت به T_1 و T_2 روابط ۳۴ و ۳۵ به دست می‌آید.

$$T_2 = 0.000428T_1 + 0.56123 \quad (۳۴)$$

$$T_1 = 1.0757\sqrt{0.51279T_2^2 - 0.57559T_2 + 1} \quad (۳۵)$$

با استفاده از حل دو معادله ۳۷ و ۳۸ مقادیر متغیرهای T_1 و T_2 به دست می‌آید که در جدول (۴) ارائه‌شده است.

جدول (۴): مقادیر بهینه متغیرهای مثال عددی

T_1	T_2	TC
۰/۹۸۵	۰/۵۶۲	۴۵۵/۵۶۳

برای اطمینان از بهینگی، جواب‌های به‌دست‌آمده در شرایط بهینگی بررسی‌شده‌اند. با توجه به اینکه مشتق اول تابع هزینه کل در نقطه به‌دست‌آمده برابر صفر بوده و هشین تابع در آن نقطه معین مثبت است. بنابراین نقطه به‌دست‌آمده مینیمم تابع هزینه است. بررسی این شرایط در روابط (۳۶) تا (۳۸) داده‌شده است.

$$\frac{\partial TC}{\partial T_1} = \frac{\partial TC}{\partial T_2} = 0 \quad (۳۶)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{TC}}{\partial \mathrm{T}_1^2} = 350.9 > 0 \quad (۳۷)$$

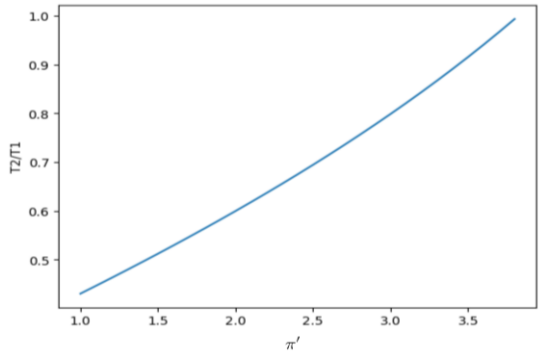
$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{TC}}{\partial \mathrm{T}_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathrm{TC}}{\partial \mathrm{T}_2^2}\right) - \left[\left(\frac{\partial \mathrm{TC}}{\partial \mathrm{T}_1}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{TC}}{\partial \mathrm{T}_2}\right)\right]^2 = 73077.4 > 0 \quad (۳۸)$$

۴-۱- تحلیل حساسیت

در این قسمت با تغییر پارامترها به تحلیل مدل پرداخته می‌شود. برای این منظور اثر تغییر پارامترها بر هزینه کل و همچنین سطح سرویس کالای دوم بررسی می‌شود. منظور ما از سطح سرویس کالای دوم نسبت T_2 به T_1 است که بیان می‌کند چه کسری از زمان کالای دوم موجودی خالص مثبت دارد.

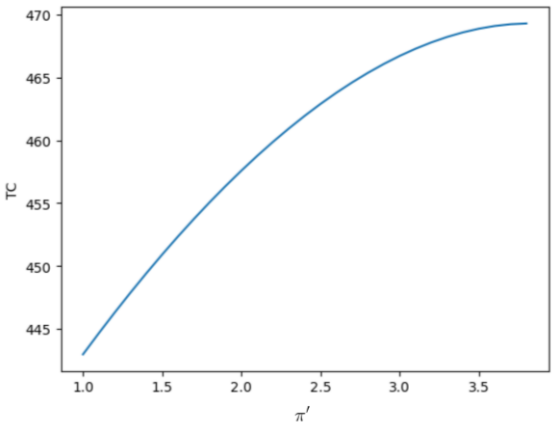
۴-۱-۱- افزایش هزینه جایگزینی

همان‌طور که در شکل (۲) مشخص است با افزایش هزینه‌های جایگزینی سطح سرویس کالای دوم افزایش می‌یابد. به‌عبارت‌دیگر مدل تلاش می‌کند در هنگام بالا بودن هزینه جایگزینی، مقدار کمتری از کالای دوم دچار کمبود شود بنابراین نسبتی از زمان که کالای دوم موجودی خالص مثبت دارد افزایش می‌یابد.



شکل (۲): تغییرات سطح سرویس کالای دوم به ازای مقادیر مختلف هزینه جایگزینی

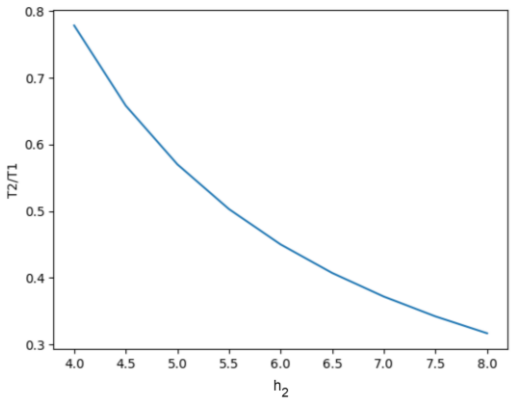
اثر افزایش هزینه جایگزینی بر هزینه کل در شکل (۳) نشان داده‌شده است. همان‌طور که در شکل (۳) مشخص است با افزایش هزینه‌های جایگزینی هزینه کل افزایش پیدا می‌کند. به تعبیر دیگر با کاهش هزینه‌های جایگزینی منافع بیشتری برای شرکت در بهره‌مندی از امکان تعویض فراهم می‌شود.



شکل (۳): تغییرات هزینه کل سیستم به ازای مقادیر مختلف هزینه جایگزینی

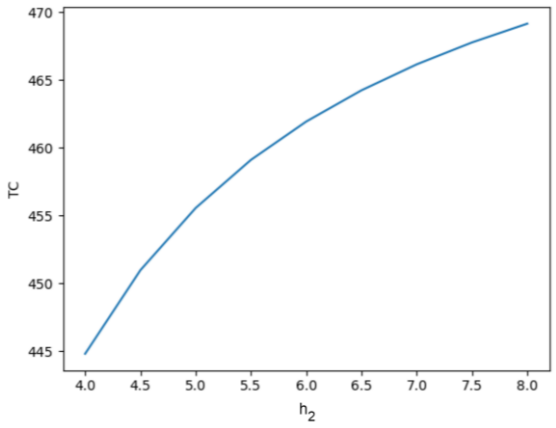
۴-۱-۲- افزایش هزینه نگهداری

همان‌طور که در شکل (۴) مشخص است با افزایش هزینه‌های نگهداری کالای دوم، سطح سرویس کالای دوم کاهش می‌یابد. به‌عبارت‌دیگر مدل تلاش می‌کند در هنگام بالا بودن هزینه نگهداری، مقدار کمتری از کالای دوم نگهداری کند و بیشتر از امکان جایگزینی استفاده کند.



شکل (۴): تغییرات سطح سرویس کالای دوم به ازای مقادیر مختلف هزینه نگهداری

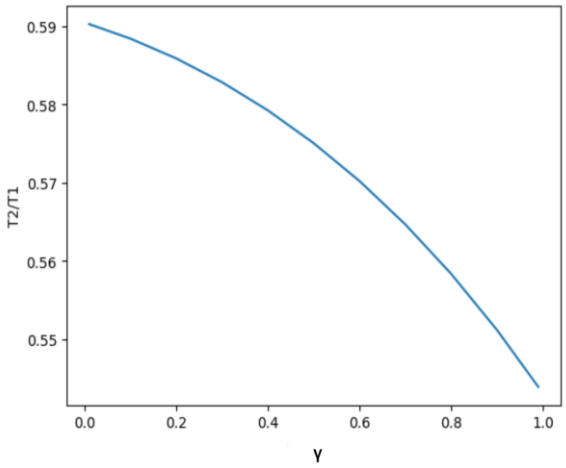
اثر افزایش هزینه نگهداری بر هزینه کل در شکل (۵) نشان داده‌شده است. همان‌طور که در شکل (۵) مشخص است با افزایش هزینه‌های نگهداری هزینه کل افزایش پیدا می‌کند.



شکل (۵): تغییرات هزینه کل سیستم به ازای مقادیر مختلف هزینه نگهداری

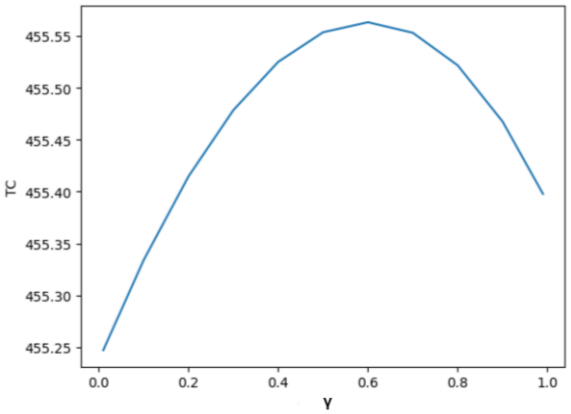
۴-۱-۳- افزایش درصد جایگزینی

همان‌طور که در شکل (۶) مشخص است با افزایش درصد جایگزینی کالای دوم، سطح سرویس کالای دوم کاهش می‌یابد. به‌عبارت‌دیگر مدل تلاش می‌کند در هنگام بالا بودن درصد جایگزینی، مقدار کمتری از کالای دوم نگهداری کند و بیشتر از امکان جایگزینی استفاده کند.



شکل (۶): تغییرات سطح سرویس کالای دوم به ازای مقادیر مختلف درصد جایگزینی

اثر افزایش درصد جایگزینی بر هزینه کل در شکل (۷) نشان داده‌شده است. همان‌طور که در شکل (۷) مشخص است با افزایش درصد جایگزینی هزینه کل در ابتدا افزایش پیداکرده و سپس کاهش‌یافته است. بنابراین افزایش یا کاهش درصد جایگزینی اقلام می‌تواند اثرات متفاوتی داشته باشد و این به پارامترهای مدل بستگی دارد. ازاین‌رو، اگر درصد جایگزینی به‌عنوان متغیر تصمیم در نظر گرفته شود می‌توان مقدار بهینه آن را تعیین کرد.



شکل (۷): تغییرات هزینه کل سیستم به ازای مقادیر مختلف درصد جایگزینی

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به بیان اهمیت جایگزینی اقلام در مدیریت موجودی‌ها و کنترل هزینه‌های کمبود اشاره شد. سپس یک مدل برای دو قلم کالای نسبتاً جایگزین با سیکل سفارش مشترک و امکان خرابی در انباشته‌های سفارش توسعه داده شد. طبق مفروضات مسئله کالای اول دچار کمبود نمی‌شود اما در هنگامی‌که کالای دوم با کمبود مواجه می‌شود، بخشی از تقاضای کالای ۲ با کالای ۱ جایگزین می‌شود و بخش دیگر از دست می‌رود. مدل‌سازی مسئله بر اساس جریان موجودی خالص دو قلم کالا ارائه شد و حل تحلیلی مدل برای حالات خاصی ارائه شد. در حالت کلی حل تحلیلی مدل منجر به پاسخ‌هایی شد که متغیرها در فرمول نهایی بر اساس یکدیگر بیان‌شده بودند. بنابراین نیاز به حل عددی برای یافتن جواب‌های دو معادله دو مجهول حاصل از مشتق تابع هدف بود. دو معادله دو مجهول مثال عددی توسعه‌یافته حل‌شده و جواب‌های به‌دست‌آمده در شرایط بهینگی مرتبه اول و دوم بررسی شدند. سپس اثر تغییر پارامترهای هزینه جایگزینی، هزینه نگهداری کالای دوم و درصد جایگزینی بر سطح سرویس کالای دوم و هزینه کل بررسی شد. بر اساس تحلیل حساسیت انجام‌شده، کاهش هزینه جایگزینی، افزایش درصد جایگزینی و یا افزایش هزینه نگهداری کالای دوم منجر به افزایش استفاده از فرصت جایگزینی در سیستم شد. افزایش هزینه جایگزینی و هزینه نگهداری کالای دوم منجر به افزایش هزینه کل سیستم شد اما در خصوص درصد جایگزینی رفتار هزینه کل یکنواخت نبود.

در این پژوهش مدل‌سازی برای یک سیستم دو کالایی صورت گرفته است. سیستم چند کالایی به دلیل تعداد حالات زیاد جایگزینی، می‌تواند دارای پیچیدگی خاص باشد. از مطالعات آتی می‌توان به مدل‌سازی مسئله در سیستم چند کالایی اشاره کرد. همچنین درصد جایگزینی اقلام می‌تواند وابسته به سطح موجودی و یا قیمت کالای جایگزین باشد که می‌تواند شروع خوبی برای مطالعات آتی باشد.

۶- مراجع

[1] M. Erfanian, and B. Bayani, "Simulation Based Optimization Multi Echelon Inventory system with uncertain and prioritize Demand", Iranian Journal of Supply Chain Management, vol. 20, no. 61, pp. 29-33, 2019, DOR: 20.1001.1.20089198.1397.20.61.3.6. [In Persian]
[2] Z. Drezner, H. Gurnani, and B.A. Pasternack, "An EOQ model with substitutions between products", J. Oper. Res. Soc., vol. 46, no. 7, pp. 887-891, 1995, https://doi.org/10.1057/jors.1995.120.
[3] H. Gurnani, and Z. Drezner, "Deterministic hierarchical substitution inventory models", J. Oper. Res. Soc., vol. 51, no. 1, pp. 129-133, 2000, https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600843.
[4] H. Y. Kang, A.H. Lee, and C.M. Lai, "An integrated replenishment model with quantity discounts, reentry and downward substitution for control wafers", J. Intell. Manuf., vol. 23, no. 5, pp. 1745-176, 2012, https://doi.org/10.1007/s10845-010-0479-z.
[5] A. A. Taleizadeh, M. Noori-daryan, and L.E. Cárdenas-Barrón, "Joint optimization of price, replenishment frequency, replenishment cycle and production rate in vendor managed inventory system with deteriorating items", Int. J. Prod. Econ., vol. 159, pp. 285-295, 2015, https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2014.09.009
[6] S. M. Seyedhoseini, R. Rashid, I. Kamalpour, and E.Zangeneh, "Application of queuing theory in inventory systems with substitution flexibility", J. Ind. Eng. Int., vol. 11, pp. 37-44. 2015, https://doi.org/10.1007/s40092-015-0099-5.
[7] A. Burnetas, and O. Kanavetas, "Inventory policies for two products under Poisson demand: Interaction between demand substitution, limited storage capacity and replenishment time uncertainty", Nav. Res. Logist., vol. 65, no. 8, pp. 676-698, 2018, https://doi.org/10.1002/nav.21788.
[8] B. Maddah, M. Kharbeche, S. Pokharel, and A. Ghoniem, "Joint replenishment model for multiple products with substitution", Appl. Math. Model., vol. 40, no. 17-18, pp. 7678-7688, 2016, https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.03.027.
[9] B.A. Pasternack, and Z. Drezner, "Optimal inventory policies for substitutable commodities with stochastic demand", Nav. Res. Logist., vol. 38, no. 2, pp. 221-240, 1991, https://doi.org/10.1002/1520-6750(199104)38:2%3C221::AID-NAV3220380208%3E3.0.CO;2-7
[10] R. N. Giri, S. K. Mondal, and M. Maiti, "Joint replenishment model of both-ways and one-way substitution among products in fixed time horizon", Int. J. Math. Oper. Res., vol. 14, no. 1, pp. 30-52, 2019, https://doi.org/10.1504/IJMOR.2019.096977.
[11] H. Mokhtari, "Economic order quantity for joint complementary and substitutable items", Int. J. Math. Comput. Simul., vol. 154, pp. 34-47, 2018, https://doi.org/10.1016/j.matcom.2018.06.004.
[12] R. K. Mishra, and V. K. Mishra, "Effect of Deterioration and Partial Substitution on Optimal Inventory Decisions for Complementary and Substitutable Items with Cost of Substitution under Joint Replenishment", Int. J. Inf. Manag. Sci., vol. 31, no. 4, pp. 393-422, 2020, https://doi.org/10.6186/IJIMS.202012_31(4).0005.
[13] R. H. Teunter, and S. Kuipers, "Inventory control with demand substitution: new insights from a two-product Economic Order Quantity analysis", Omega, vol. 113, pp. 102712, 2022, https://doi.org/10.1016/j.omega.2022.102712
[14] M. Salameh, and M. Jaber, "Economic production quantity model for items with imperfect quality", Int. J. Prod. Econ., vol. 64, no. 1, pp. 59-64, 2000, https://doi.org/10.1016/S0925-5273(99)00044-4.
[15] S. K. Goyal, and L. E. Cárdenas-Barrón, "Note on: economic production quantity model for items with imperfect quality–a

practical approach", Int. J. Prod. Econ., vol. 77, no. 1, pp. 85-87, 2002, https://doi.org/10.1016/S0925-5273(01)00203-1.
[16] J. Rezaei, "Economic order quantity model with backorder for imperfect quality items", Proceedings. 2005 IEEE International Engineering Management Conference, 2005., St. John's, NL, Canada, 2005, pp. 466-470, DOI: 10.1109/IEMC.2005.1559191.
[17] J. C.Yu, H. M. Wee, and J. M. Chen, "Optimal ordering policy for a deteriorating item with imperfect quality and partial backordering", J. Chin. Inst. Chem. Eng., vol. 22, no. 6, pp. 509-520. 2005, https://doi.org/10.29977/JCIIE.200511.0007.
[18] S. Papachristos, and I. Konstantaras, "Economic ordering quantity models for items with imperfect quality", Int. J. Prod. Econ., vol. 100, no. 1, pp. 148-15, 2006, https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2004.11.004.
[19] B. Maddah, and M. Y. Jaber, "Economic order quantity for items with imperfect quality: revisited", Int. J. Prod. Econ., vol. 112, no. 2, pp. 808-815, 2008, https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2007.07.003.
[20] B. Maddah, M. K. Salameh, and L. Moussawi-Haidar, "Order overlapping: A practical approach for preventing shortages during screening", Comput. Ind. Eng., vol. 58, no. 4, pp. 691-695, 2010, https://doi.org/10.1016/j.cie.2010.01.014.
[21] S. S. Sana, "A production-inventory model of imperfect quality products in a three-layer supply chain", Decis. Support Syst., vol. 50, no. 2, pp. 539-547, 2011, https://doi.org/10.1016/j.dss.2010.11.012.
[22] S. Paul, M.I.M. Wahab, and P. Ongkunaruk, "Joint replenishment with imperfect items and price discoun", Comput. Ind. Eng., vol. 74, pp. 179-18, 2014, https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.05.015.
[23] L. Moussawi-Haidar, M. Salameh, and W. Nasr, "Effect of deterioration on the instantaneous replenishment model with imperfect quality items", Appl. Math. Model., vol. 38, no. 24, pp. 5956-596. 2014, https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.05.003.
[24] J. Bhowmick, "Optimal inventory policies for imperfect inventory with price dependent stochastic demand and partially backlogged shortages", Yugoslav Journal of Operations Research, vol. 22, no. 2, pp. 199-223, 2012, https://doi.org/10.2298/YJOR101011007B
[25] A. Mukhopadhyay, and A. Goswami, "An inventory model with shortages for imperfect items using substitution of two products", Int. J. Oper. Res., vol. 30, no. 2, pp. 193-219, 2017, https://doi.org/10.1504/IJOR.2017.086525.